

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação na área de Sistemas e Controle.

Davi Antônio dos Santos

**ESTIMAÇÃO DE ATITUDE E VELOCIDADE ANGULAR DE
SATÉLITES UTILIZANDO MEDIDAS DO CAMPO GEOMAGNÉTICO E
DA DIREÇÃO DO SOL**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



**Prof. Dr. Jacques Waldmann
Orientador**

**Prof. Dr. Homero Santiago Maciel
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa**

**Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2008**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Santos, Davi Antônio

Estimação de atitude e velocidade angular de satélites utilizando medidas do campo geomagnético e da direção do Sol / Davi Antônio dos Santos.

São José dos Campos, 2008.

138f.

Tese de mestrado – Curso de Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2008. Orientador: Dr. Jacques Waldmann.

1. Estimação de atitude. 2. Estimação de velocidade angular. 3. Filtro de Kalman *unscented*. I. Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia Eletrônica. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Santos, Davi Antônio. **Estimação de atitude e velocidade angular de satélites utilizando medidas do campo geomagnético e da direção do Sol**. 2008. 138f. Tese de mestrado em Sistemas e Controle – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Davi Antônio dos Santos

TÍTULO DO TRABALHO: Estimação de atitude e velocidade angular de satélites utilizando medidas do campo geomagnético e da direção do Sol

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese /2008

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Davi Antônio dos Santos

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

Divisão de Engenharia Eletrônica – Sala 194

Pça. Mal-do-Ar Eduardo Gomes, 50 – Vl. Acácias

12228-900 – São José dos Campos – SP

**ESTIMAÇÃO DE ATITUDE E VELOCIDADE ANGULAR DE
SATÉLITES UTILIZANDO MEDIDAS DO CAMPO
GEOMAGNÉTICO E DA DIREÇÃO DO SOL**

Davi Antônio dos Santos

Composição da Banca Examinadora:

Prof.	Dr. Karl Heinz Kienitz	Presidente – ITA
Prof.	Dr. Jacques Waldmann	Orientador – ITA
Prof.	Dr. Marcelo Gomes da Silva Bruno	- ITA
	Dr. Hélio Koiti Kuga	- INPE

Aos meus pais: Antônio e Filomena.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado capacidade, oportunidade e motivação para realizar esse trabalho. Agradeço a meus pais por sempre me incentivarem e me apoiarem em minhas decisões. Agradeço aos meus colegas (que também são meus amigos), os quais foram companhia nos momentos difíceis e também nos momentos alegres. Agradeço ao prof. Jacques Waldmann que se dispôs a me orientar e me deu a oportunidade de participar do projeto ITASAT. Agradeço ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica por fornecer-me a estrutura necessária para desenvolver este trabalho. Agradeço ao auxílio financeiro fornecido pelo projeto ITASAT.

*Por tanto amor, por tanta emoção
A vida me fez assim
Doce ou atroz, manso ou feroz
Eu, caçador de mim ...
(Milton Nascimento)*

RESUMO

Um Sistema de Controle de Atitude (SCA) requer estimativas da atitude e velocidade angular em tempo real para que, em malha fechada, ele possa corrigir o apontamento do satélite conforme desejado. Essas estimativas são produzidas por um Sistema de Determinação de Atitude (SDA), o qual se constitui basicamente de sensores e de métodos de estimação. O desenvolvimento de satélites de baixo custo motiva pesquisas sobre métodos que possibilitam a estimação de atitude e velocidade angular tendo em vista o uso de medidas apenas de sensores de atitude, evitando-se o emprego de girômetros. Sensor solar e magnetômetro são sensores de atitude comumente utilizados por apresentarem baixo consumo de energia, ocuparem pouco espaço, serem leves e baratos. O presente trabalho tem por objeto revisar métodos de estimação baseados no filtro de Kalman estendido (EKF) e propor, com o intento de investigação, métodos semelhantes baseados no filtro de Kalman *unscented* (UKF). Adicionalmente, propõe-se ao final um SDA autônomo para satélites de baixo custo, estabilizados por rotação ou controlados em 3 eixos, que se movem em órbitas terrestres baixas e embarcam magnetômetro e sensores solares. Os estimadores desse sistema são avaliados com dados simulados. Os resultados indicam que o conjunto de sensores que se pretende utilizar no satélite universitário ITASAT produz estimativas que divergem durante movimentos angulares lentos em períodos de eclipse solar. Dessa forma, o controle de atitude em 3 eixos baseado nas estimativas de atitude e de velocidade angular produzidas pelo SDA proposto deve ser avaliado cautelosamente para que, mesmo em períodos de eclipse, seja capaz de prover segurança térmica cumprindo com a restrição de ortogonalidade entre o eixo de simetria do satélite e a direção do Sol. Os resultados obtidos serão utilizados no SDA do satélite ITASAT em desenvolvimento no ITA sob a égide da Agência Espacial Brasileira.

ABSTRACT

An Attitude Control System (SCA) capable of orienting an artificial satellite during its entire life cycle is essential. An SCA requires real-time attitude and angular velocity estimates, which are used in a control law designed to correct the satellite orientation according to a desired setpoint. Such estimates are produced by an Attitude Determination System (SDA), basically composed of sensors and estimation methods. The increasing interest for low-budget satellite designs has recently motivated research in attitude and angular velocity estimation considering measurements from attitude sensors only, and dispensing with the use of rate gyros. Sun sensor and magnetometer are examples of commonly used attitude sensors. They are small, lightweight, inexpensive and consume little energy; such are the features that make them most attractive. The goal of this dissertation is to review estimation methods based on the extended Kalman filter (EKF), and to propose and investigate novel formulations that rely on the unscented Kalman filter (UKF). Additionally, an autonomous SDA is proposed for low-budget, low-earth orbit, either spin stabilized or 3-axis controlled satellites with onboard magnetometer and sun sensors. All estimators are tested against synthetic sensor data. The results indicate that the sensor suite intended for use onboard ITASAT provides diverging estimates during slow angular motion as the satellite undergoes the eclipse interval in every orbit. Thus, closed-loop 3-axis control during the eclipse intervals based on attitude and angular velocity estimates should be weighted carefully against thermal safety considerations that impose the orthogonality constraint between ITASAT's symmetry axis and the direction of the Sun. This dissertation is part of the presently undergoing effort to design ITASAT – ITA's university satellite – under the auspices of the Brazilian Space Agency.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	vi
Lista de Símbolos	viii
1 Introdução	1
1.1 Revisão bibliográfica.....	3
1.1.1 Estimação de atitude em 3 eixos.....	3
1.1.2 Estimação de velocidade angular	6
1.2 Objetivos	8
1.3 Contribuições.....	8
1.4 Organização do texto.....	9
2 Estimação do estado de sistemas não-lineares	11
2.1 Filtragem Bayesiana	11
2.2 Filtro de Kalman estendido	14
2.3 Filtro de Kalman <i>unscented</i>	16
2.4 Comentários.....	21
3 Estimação de atitude	23
3.1 Definição do problema	23
3.2 Estimadores de atitude.....	26
3.2.1 Estimação de quatérnio.....	26
3.2.2 Estimação de ângulos de Euler.....	32
3.2.3 Estimação de DCM.....	36
3.2.4 Abordagem multiplicativa usando quatérnio e MRP	42

3.3	Avaliação baseada em simulações	50
3.3.1	Simulação do movimento verdadeiro e das medidas.....	50
3.3.2	Simulações de Monte Carlo.....	52
3.3.3	Carga computacional	58
3.4	Comentários.....	59
4	Estimação de velocidade angular	60
4.1	Definição do problema	60
4.2	Estimadores de velocidade angular	62
4.2.1	Abordagem baseada em derivação	62
4.2.2	Abordagem baseada em estimação	67
4.3	Avaliação baseada em simulações	72
4.3.1	Simulação do movimento verdadeiro e das medidas.....	72
4.3.2	Simulações de Monte Carlo.....	74
4.3.3	Carga computacional	79
4.4	Comentários.....	79
5	Sistema de determinação de atitude autônomo para satélites de baixo custo	81
5.1	Estimadores de atitude e velocidade angular	81
5.1.1	Equações de estado e de medidas	82
5.1.2	Estimador AVEKF	84
5.1.3	Estimador AVUKF	85
5.2	Estimadores de <i>bias</i> de magnetômetro	86
5.2.1	Equações de estado e de medidas	87
5.2.2	Estimador MAGEKF.....	88
5.2.3	Estimador MAGUKF	89
5.3	Um sistema de determinação de atitude para satélites de baixo custo	90

5.4	Avaliação dos estimadores do SDA utilizando dados simulados	95
5.4.1	Estimação de <i>bias</i> de magnetômetro	95
5.4.2	Estimação de atitude e velocidade angular – sem eclipse	96
5.4.3	Estimação de atitude e velocidade angular – com eclipse	101
5.5	Comentários	105
6	Conclusão	107
6.1	Conclusões gerais	107
6.2	Trabalhos futuros	109
Apêndice A	Propagação de médias e covariâncias	111
Apêndice B	Matrizes Jacobianas	114
Apêndice C	Covariância dos ruídos aleatórios das medidas empregadas nos estimadores DA	123
Apêndice D	Simulação de atitude	125
	Referências bibliográficas	130

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Sensores do satélite ITASAT	2
Figura 1.2: Classificação dos métodos de estimação de atitude em 3-eixos	5
Figura 1.3: Classificação dos métodos de estimação de velocidade angular	7
Figura 3.1: Estrutura dos estimadores de atitude.....	25
Figura 3.2: Estrutura do estimador MEKF.....	43
Figura 3.3: Estrutura do estimador MUKF.....	48
Figura 3.4: Erros angulares dos estimadores de atitude	55
Figura 3.5: Índices de ortonormalidade dos estimadores de atitude.....	56
Figura 4.1: Estimador de velocidade angular – abordagem DA-VM	64
Figura 4.2: Estimador de velocidade angular – abordagem EA-VM	69
Figura 4.3: Índices de desempenho dos estimadores de velocidade angular.....	76
Figura 4.4: Taxas de convergência dos estimadores de velocidade angular	77
Figura 5.1: Um SDA para satélites de baixo custo	90
Figura 5.2: Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento <i>lento</i>	99
Figura 5.3: Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de <i>spin</i>	99
Figura 5.4: Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de <i>tumbling</i>	100
Figura 5.5: Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores durante 1 período de órbita (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento <i>lento</i>	103
Figura 5.6: Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores durante 1 período de órbita (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de <i>spin</i>	103

Figura 5.7: Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores durante 1 período de órbita (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de <i>tumbling</i>	104
Figura 5.8: Medidas do campo geomagnético.....	105
Figura D.1: Diagrama de blocos da simulação do movimento de atitude	126
Figura D.2: Diagrama de blocos da simulação das medidas de campo geomagnético	127
Figura D.3: Ângulos medidos pelo sensor solar	128
Figura D.4: Diagrama de blocos da simulação das medidas da direção do Sol	128

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Estimadores MV de atitude em 3-eixos que utilizam medidas vetoriais	23
Tabela 3.2: Estimador de quatérnio de rotação – QEKF	31
Tabela 3.3: Estimador de quatérnio de rotação – QUKF	32
Tabela 3.4: Estimador de ângulos de Euler – EEKF	35
Tabela 3.5: Estimador de ângulos de Euler – EUKF	36
Tabela 3.6: Estimador de DCM – DKF	41
Tabela 3.7: Estimador de DCM – DKFUO	42
Tabela 3.8: Estimador EKF multiplicativo – MEKF	47
Tabela 3.9: Estimador UKF multiplicativo – MUKF	49
Tabela 3.10: Parâmetros da simulação do movimento verdadeiro para avaliação dos estimadores de atitude	50
Tabela 3.11: Covariâncias verdadeiras dos ruídos de medidas para avaliação dos estimadores de atitude	51
Tabela 3.12: Inicialização dos estimadores de atitude	53
Tabela 3.13: Tempos de convergência dos estimadores de atitude – $\sigma_0 = 5,0 \text{ graus}$	57
Tabela 3.14: Acurácias dos estimadores de atitude – $\sigma_0 = 5,0 \text{ graus}$	57
Tabela 3.15: Robustez dos estimadores de atitude em relação ao erro de inicialização – $T = 0,1 \text{ s}$	58
Tabela 3.16: Cargas computacionais dos estimadores de atitude	59
Tabela 4.1: Estimador de velocidade angular – DAEKF	66
Tabela 4.2: Estimador de velocidade angular – DAUKF	67
Tabela 4.3: Estimador de velocidade angular – EAEKF	70
Tabela 4.4: Estimador de velocidade angular – EAUKF	71

Tabela 4.5: Parâmetros da simulação do movimento verdadeiro para avaliação dos estimadores de velocidade angular	72
Tabela 4.6: Covariâncias verdadeiras dos ruídos de medidas para avaliação dos estimadores de velocidade angular	73
Tabela 4.7: Inicialização dos estimadores de velocidade angular	74
Tabela 4.8: Parâmetros dos estimadores DA	75
Tabela 4.9: Parâmetros dos estimadores EA	75
Tabela 4.10: Acurácias dos estimadores de velocidade angular – $\sigma_0 = 5,0 \text{ graus/s}$	78
Tabela 4.11: Robustez dos estimadores de velocidade angular em relação ao erro de inicialização – $T = 0,1 \text{ s}$	78
Tabela 4.12: Cargas computacionais dos estimadores de velocidade angular	79
Tabela 5.1: Estimador de atitude e velocidade angular – AVEKF	85
Tabela 5.2: Estimador de atitude e velocidade angular – AVUKF	86
Tabela 5.3: Estimador de <i>bias</i> de magnetômetro – MAGEKF.....	89
Tabela 5.4: Estimador de <i>bias</i> de magnetômetro – MAGUKF	89
Tabela 5.5: Condições iniciais dos movimentos utilizados na avaliação do SDA proposto....	94
Tabela 5.6: Estimativas de <i>bias</i> de magnetômetro – movimento de <i>spin</i>	95
Tabela 5.7: Estimativas de <i>bias</i> de magnetômetro – movimento de <i>tumbling</i>	96
Tabela 5.8: Estimativas de <i>bias</i> de magnetômetro – movimento de lento	96
Tabela 5.9: Covariância do ruído de estado	97
Tabela 5.10: Acurácia de estimação de atitude	100
Tabela 5.11: Acurácia de estimação de velocidade angular	101
Tabela D.1: Elementos orbitais do movimento verdadeiro	125

LISTA DE SÍMBOLOS

ABREVIATURAS:

AV	Atitude e Velocidade Angular
DA	Abordagem baseada em derivação (<i>derivative approach</i>)
DCM	Matriz de cossenos diretores (<i>direction cosine matrix</i>)
EA	Abordagem baseada em estimação (<i>estimation approach</i>)
EKF	Filtro de Kalman estendido (<i>Extended Kalman Filter</i>)
GMT	Tempo solar médio no meridiano de Greenwich (<i>Greenwich Mean Time</i>)
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IU	Integração <i>unscented</i>
KF	Filtro de Kalman (<i>Kalman Filter</i>)
MQ	Mínimos quadrados
MRP	Parâmetros de Rodrigues modificados (<i>Modified Rodrigues Parameters</i>)
MV	Variância mínima (<i>Minimum Variance</i>)
PDF	Função densidade de probabilidade (<i>Probability Density Function</i>)
SCA	Sistema de controle de atitude
SCC	Sistema de coordenadas Cartesianas
SDA	Sistema de determinação de atitude
SI	Sistema Internacional de Unidades
SO(3)	Grupo de matrizes ortonormais de dimensão 3×3
TU	Transformação <i>unscented</i>
UKF	Filtro de Kalman <i>unscented</i> (<i>Unscented Kalman Filter</i>)
VA	Vetor aleatório

NOTAÇÃO:

$p(\mathbf{x})$	Função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório (VA) \mathbf{x} e que será referida como PDF (<i>Probability Density Function</i>).
$p(\mathbf{x} \mathbf{y})$	Função densidade de probabilidade conjunta do VA \mathbf{x} condicionado ao VA \mathbf{y} , que será referida como PDF condicional.
\mathfrak{R}	Conjunto dos números reais.
$\{\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^n\}$	Seqüência estocástica. O sub-índice k se refere ao instante de tempo $t_k \in T$, onde T é o domínio da seqüência. Quando a dimensão do VA estiver subentendida, simplifica-se essa notação por $\{\mathbf{x}_k\}$.
$\{\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n\}$	Processo estocástico. O parâmetro $t \in T$ representa o tempo e T é o domínio do processo. Quando a dimensão do VA estiver subentendida, simplifica-se essa notação por $\{\mathbf{x}(t)\}$.
$\mathbf{Z}_{1:k}$	Seqüência de vetores de medidas desde o instante inicial t_1 até o instante atual t_k ; $\mathbf{Z}_{1:k} \equiv \{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^{j=k}$.
$\hat{\mathbf{x}}_{k j}$	Estimativa do vetor aleatório \mathbf{x}_k obtida a partir de $\mathbf{Z}_{1:j}$.
$\tilde{\mathbf{x}}_{k j}$	Erro de estimação do vetor aleatório \mathbf{x}_k quando sua estimativa é obtida a partir de $\mathbf{Z}_{1:j}$; $\tilde{\mathbf{x}}_{k j} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k j}$.
$\mathbf{P}_{k j}$	Matriz de covariância do erro de estimação $\tilde{\mathbf{x}}_{k j}$ condicionada às observações $\mathbf{Z}_{1:k}$.
\mathbf{P}^{xy}	Matriz de covariância cruzada entre os VAs \mathbf{x} e \mathbf{y} .
\mathbf{P}^y	Matriz de covariância do VA \mathbf{y} .
\mathbf{A}'	Matriz transposta de \mathbf{A} .
$\det(\mathbf{A})$	Determinante da matriz \mathbf{A} .
$E[.]$	Operador esperança matemática (média).

$cov[.]$	Operador covariância.
$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P})$	O VA \mathbf{x} tem distribuição Gaussiana (multivariável) com média $\bar{\mathbf{x}}$ e matriz covariância \mathbf{P} .
$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P})$	$p(\mathbf{x})$ é uma PDF Gaussiana (multivariável) do VA $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ com média $\bar{\mathbf{x}}$ e matriz covariância \mathbf{P} , ou seja, $p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \det(\mathbf{P})} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})'}$.
$\delta(t - \tau)$	Delta de Dirac.
δ_{jk}	Delta de Kronecker.
$[\mathbf{a} \times]$	Representação matricial da operação produto vetorial em que o vetor $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]'$ fica à esquerda. Essa matriz é dada por $[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$.
$\ \mathbf{a}\ $	Norma Euclidiana do vetor $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]'$. Esse escalar é dado por $\ \mathbf{a}\ = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.
z	Variável complexa da transformada-Z.
A_{ij}	Elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz \mathbf{A} .
\mathbf{I}_n	Matriz identidade de ordem n .

1 INTRODUÇÃO

Um Sistema de Controle de Atitude (SCA) é requerido pela maioria dos satélites, os quais necessitam orientar adequadamente painéis solares, antenas, dissipadores de calor, propulsores para manobra orbital, câmera, etc. O SCA, como qualquer sistema de controle em malha fechada, requer o conhecimento do estado do sistema, nesse caso a atitude, para que um sinal de controle possa ser calculado objetivando manter esse estado do veículo ou seguir uma trajetória desejada (Shinners, 1998). O conhecimento da atitude do sistema é obtido a partir de dados de sensores através de um Sistema de Determinação de Atitude (SDA).

Há uma tendência recente a se desenvolver satélites pequenos, leves e de baixo custo (Azor *et al.*, 2001). Como exemplos, citam-se os satélites universitários: AAU CUBESAT (Krogh e Schreder, 2002), NCUBE (Svartveit, 2003) e Orsted (Wisniewski, 2000). Sensores comumente utilizados por SDA's de satélites com essas características são o magnetômetro e o sensor solar, que são dispositivos com características coerentes com as de um satélite de baixo custo. Embora tais satélites geralmente não utilizem girômetros, informação sobre velocidade angular é freqüentemente requerida para fins de controle e propagação de atitude (Azor *et al.*, 1998), sendo então necessário estimá-la a partir dos sensores de atitude disponíveis.

Este trabalho é motivado pelo projeto do satélite universitário ITASAT. O ITASAT – ilustrado na Figura 1.1 – terá embarcado três sensores solares de 2 eixos (SS_1 , SS_2 e SS_3) e um magnetômetro de 3 eixos (SM). Pretende-se que sua missão contenha três estágios. O primeiro consiste na fase operacional, na qual o satélite terá sua atitude estabilizada por rotação. Nessa fase, o ITASAT operará como um satélite de coleta de dados. O segundo estágio consiste na fase experimental, na qual a estabilização será em 3 eixos. O terceiro é

igual ao primeiro. Em ambos os estágios o satélite será controlado por meio de magnetotorqueadores de forma a cumprir com o requisito de segurança térmica que consiste em manter a ortogonalidade entre o eixo de simetria com maior momento de inércia do satélite e a direção do Sol. O ITASAT apresentará uma massa de 73,6 kg, terá formato de um paralelepípedo com dimensões 700x700x650 mm e ocupará uma órbita circular com 750 km de altitude e 25° de inclinação.

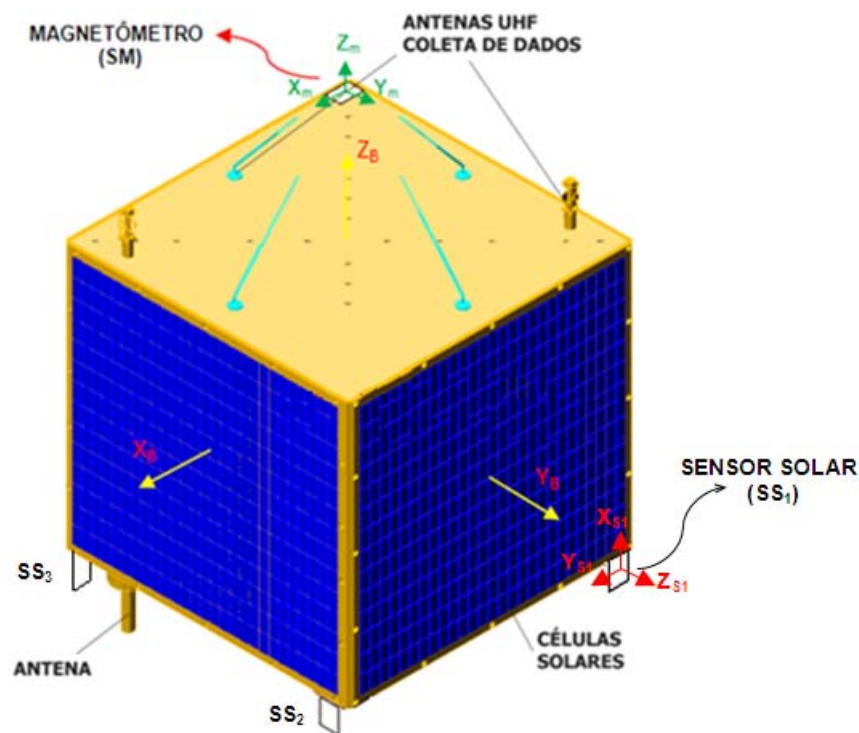


Figura 1.1 Sensores do satélite ITASAT.

A seção 1.1 faz uma revisão bibliográfica expondo o estado da arte a partir do qual se estabelecem os objetivos apresentados na seção 1.2. A seção 1.3 apresenta as contribuições do trabalho. Por fim, a seção 1.4 apresenta a organização do texto.

1.1 Revisão bibliográfica

Em seguida, faz-se uma revisão bibliográfica relativa aos métodos de estimação de atitude e velocidade angular a partir de medidas vetoriais, que são os assuntos enfocados no trabalho. Assuntos relacionados a análise de missões, úteis principalmente em etapas iniciais de projetos de satélites, são encontrados em Larson e Wertz (1999). Textos básicos sobre dinâmica de satélite são encontrados em Wiesel (1997) e em Kaplan (1976). Wertz (1978) trata de diversas peculiaridades relacionadas ao problema de determinação e controle de atitude de satélites.

A atitude em 3 eixos de um sistema de coordenadas Cartesianas (SCC) fixo ao corpo do satélite em relação a um SCC de referência pode ser representada de diversas formas. Revisões sobre representações de atitude são encontradas em Wertz (1978) e em Shuster (1993). As cinco formas de representação mais populares são os ângulos de Euler, o quatérnio de rotação, a matriz de cossenos diretores (DCM), o vetor de Euler e os parâmetros de Rodriguez (ou vetor de Gibbs).

Uma revisão bibliográfica sobre o problema de filtragem aplicado a sistemas não-lineares é apresentada no capítulo 2, onde são detalhados o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman *unscented* (UKF).

1.1.1 Estimação de atitude em 3 eixos

O estudo sobre estimação de atitude de veículos espaciais originou-se por volta de 1957, quando teve início a exploração espacial com o lançamento do Sputnik. Wertz (1978) revisa os primeiros métodos de estimação de atitude em 3 eixos, classificando-os como *métodos determinísticos* e *métodos de estimação de estado*. Neste trabalho, tais abordagens serão respectivamente chamadas de *métodos estáticos* e *métodos dinâmicos*.

Os métodos pertencentes à primeira classe têm como característica principal o fato de estimarem a atitude com base apenas nas medidas presentes, desprezando-se informações contidas em medidas adquiridas em instantes passados. Os métodos apresentados por Wertz (1978) que pertencem a essa classe são o método geométrico, o método algébrico – também conhecido como TRIAD (Shuster e Oh, 1981) – e o método-q, que consiste numa solução ao conhecido problema de Wahba (Wahba, 1965). Um exemplo de método estático bastante popular é o QUEST (Shuster e Oh, 1981), que se assemelha ao método-q, porém apresenta maior eficiência computacional (Markley e Mortari, 1999). Os *métodos estáticos* requerem medidas de duas ou mais direções conhecidas, como por exemplo, direção do Sol, do campo geomagnético, de estrela fixa ou do centro da Terra. Caso apenas uma direção seja medida, a atitude em torno dessa direção fica indeterminada (Hall, 2003). Krogh e Schreder (2002) revisam sete métodos de solução do problema de Wahba.

Os *métodos dinâmicos* são caracterizados pelo uso de informações contidas em medidas vetoriais adquiridas no passado, em conjunto com medidas presentes, para se estimar a atitude de forma ótima. Conforme o critério de otimalidade, os *métodos dinâmicos* são ainda subdivididos em métodos de mínimos quadrados (MQ) e métodos de variância mínima (MV – *Minimum Variance*). Os algoritmos REQUEST (Bar-Itzhack, 1996) e Optimal-REQUEST (Choukroun *et al.*, 2001) são exemplos de métodos MQ recursivos para estimação de quatérnio. Markley (1989) propõe um algoritmo MQ em batelada para estimação de DCM. Exemplos de métodos MV para estimação de quatérnio são o MEKF (Lefferts *et al.*, 1982), o EKF apresentado por Bar-Itzhack e Oshman (1985) e o Extended-QUEST (Psiaki, 2000). Métodos MV para estimação de ângulos de Euler são encontrados em Farrell (1970), Bar-Itzhack e Idan (1987) e Mohammed *et al.* (2005). Um método MV para estimação de DCM é encontrado em Bar-Itzhack e Reiner (1984). Ao contrário dos *métodos estáticos*, os *métodos dinâmicos* são capazes de estimar a atitude em 3 eixos medindo apenas uma direção de

referência a cada instante, pois as informações do passado podem ser suficientes para determinar a atitude, i.e., a rotação, em torno da direção medida no instante atual.

Dentre os métodos dinâmicos, os métodos MV são vantajosos, pois a análise de covariância é inerente ao processo de estimação; além disso, parâmetros como erro de zero (*bias*) de sensores de atitude, deriva (*drift*) de girômetro e momentos/produtos de inércia do satélite podem ser estimados de forma natural juntamente com os estados do sistema [vide Gelb (1974), pp. 348-351]. Por outro lado, os métodos estáticos apresentam a vantagem de requererem pouca ou nenhuma informação *a priori* da atitude do satélite. A Figura 1.1 sumariza a classificação adotada aqui para os métodos de estimação de atitude em 3 eixos.

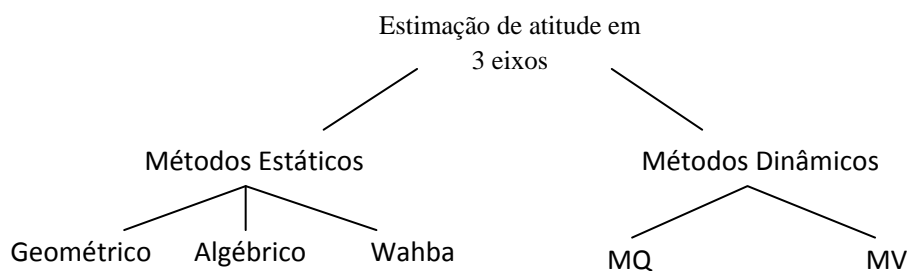


Figura 1.2 Classificação dos métodos de estimação de atitude em 3 eixos.

Classicamente, os métodos MV para estimação de atitude se baseiam no EKF. No entanto, tem-se observado na literatura recente um interesse em investigar o uso do UKF em substituição ao EKF (Crassidis e Markley, 2003; Vandyke *et al.*, 2004; Li *et al.*, 2006; Sekhavat *et al.*, 2007).

Em relação à parametrização de atitude, há uma preferência pelos métodos de estimação de quatérnio, o que é explicado pelo fato dele apresentar a mínima dimensionalidade possível para uma parametrização global em espaço 3D sem ocorrência de singularidades (Stuelpnagel, 1964) e por apresentar equação de cinemática linear (Wertz, 1978). Há em geral dois tipos de métodos MV para estimação de quatérnio: abordagem de erro multiplicativo (Lefferts *et al.*, 1982) e abordagem de erro aditivo (Bar-Itzhack e Oshman,

1985). Recentemente, tem havido interesse no desenvolvimento de estimadores de vetor de Euler (Bar-Itzhack e Cohen, 2005); (Pittelkau, 2003).

1.1.2 Estimação de velocidade angular

Com o crescente interesse no desenvolvimento de satélites pequenos e de baixo custo e, por outro lado, devido a avanços em tecnologia de sensores de atitude (Bak, 1999), surgiu o interesse em se estimar velocidade angular (Azor *et al.*, 1998). De fato, mesmo em satélites equipados com girômetros, pode ser útil a utilização de estimadores de velocidade angular quando, como consequência de anomalias no sistema de controle, os movimentos do veículo excedem a faixa de leitura desses sensores (Challa *et al.*, 1997).

Bar-Itzhack (2001) classifica os diversos estimadores de velocidade angular disponíveis na literatura em abordagem baseada em derivação (DA – *Derivative Approach*) e abordagem baseada em estimação (EA – *Estimation Approach*). Métodos de ambas as abordagens podem utilizar como dados de entrada medidas vetoriais (VM – *Vector Measurements*) providas por sensor solar, magnetômetro, etc, ou estimativas de atitude em 3 eixos (AM – *Attitude Measurements*) computadas por algum método estático. Os métodos DA são todos aqueles que utilizam derivadas numéricas dos dados de entrada no cálculo de suas estimativas, enquanto que os métodos EA são aqueles que evitam o uso de derivadas dos dados por meio da consideração da equação de cinemática de atitude (Wertz, 1978) ou da equação de cinemática de medida vetorial (Psiaki e Oshman, 2003) no conjunto de equações de estado utilizado pelo estimador. Essa classificação, que está sumarizada na Figura 1.3, será adotada neste trabalho.

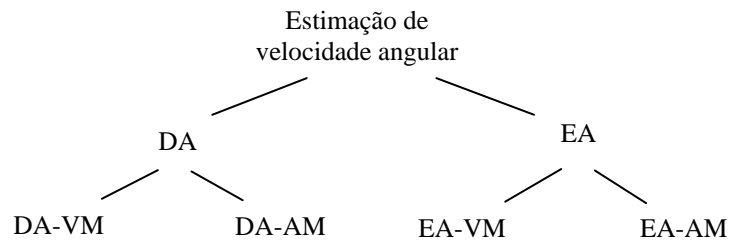


Figura 1.3 Classificação dos métodos de estimação de velocidade angular.

Os estimadores de velocidade angular propagam as estimativas entre os instantes de amostragem dos sensores utilizando as equações de dinâmica do movimento de atitude (Wertz, 1978), que correspondem a um modelo de estado não-linear. Dessa forma, um estimador de estado para dinâmica não-linear deve ser adotado na estimação. Embora o EKF seja a opção natural para tal estimador, é bastante conhecida sua sensibilidade a erros de inicialização, que decorre do uso de modelo dinâmico linearizado e pode levar o filtro à divergência (Gelb, 1974). Uma forma de lidar com esse problema consiste no uso de um algoritmo determinístico, pertencente à abordagem DA, na obtenção da estimativa inicial do EKF (Challa *et al.*, 1996; Oshman e Dellus, 2000; Psiaki e Oshman, 2003).

Outra forma encontrada na literatura para contornar a sensibilidade do EKF a erros de inicialização consiste na sua substituição por outros filtros, como o PSELIKA (Azor *et al.*, 2001), o CD-SDARE (Harman *et al.*, 1999) ou o EIKF (Azor *et al.*, 1998), os quais evitam o uso de linearização da dinâmica do satélite. Embora sejam mais robustos em relação a erros de inicialização, tais filtros produzem estimativas com menor acurácia que o EKF, quando esse não diverge (Psiaki e Oshman, 2003).

1.2 Objetivos

Este trabalho tem os seguintes objetivos:

- Revisar métodos MV para estimação de atitude em 3 eixos e métodos DA-VM e EA-VM para estimação de velocidade angular. Esses métodos a serem revisados se baseiam no EKF;
- Propor, com intenção de investigação, métodos MV para estimação de atitude em 3 eixos e métodos DA-VM e EA-VM para estimação de velocidade angular. Os métodos a serem propostos se basearão no UKF;
- Comparar, por meio de simulação, os métodos propostos com os métodos revisados;
- Propor um SDA autônomo de baixo-custo para estimação de atitude em 3 eixos e velocidade angular a partir de medidas do campo geomagnético e da direção do Sol.

1.3 Contribuições

As contribuições deste trabalho são:

- No capítulo 3 – Propõem-se os algoritmos EUKF para estimação de ângulos de Euler, QUKF para estimação de quatérnio, DUKF para estimação de matriz de cossenos diretores e MUKF para estimação de parâmetros modificados de Rodrigues (MRP);
- No capítulo 4 – Propõem-se os algoritmos de estimação de velocidade angular DAUKF, que segue a abordagem baseada em derivação das medidas de sensores, e EAUKF, que segue a abordagem que evita a computação numérica de derivadas das medidas;
- No capítulo 5 – Propõem-se um SDA autônomo de baixo custo que estima conjuntamente atitude e velocidade angular a partir de medidas de magnetômetro de 3 eixos e de sensores solares de 2 eixos.

Resultados parciais obtidos durante o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados na elaboração de três artigos apresentados em eventos: Santos e Waldmann (2007a), Santos e Waldmann (2007b) e Santos e Waldmann (2007c).

1.4 Organização do texto

Além da presente introdução, esta dissertação é constituída de mais cinco capítulos e 4 apêndices. Os apêndices apresentam complementos necessários ao entendimento do material abordado nos capítulos. Os capítulos são brevemente descritos abaixo.

- Capítulo 2 – Revisa o problema de estimação de estados de sistemas dinâmicos não-lineares a partir do filtro de Kalman estendido (EKF) e do filtro de Kalman *unscented* (UKF), assim como a transformação *unscented* (TU) e a integração *unscented* (IU).
- Capítulo 3 – Trata do problema de estimação de atitude em 3 eixos a partir de medidas vetoriais. São apresentados algoritmos de estimação da atitude parametrizada por ângulos de Euler, quatérnio de rotação, DCM e MRP. Os algoritmos apresentados que estão disponíveis na literatura se baseiam no EKF. Os algoritmos propostos a título de contribuição consistem em modificações daqueles disponíveis na literatura de forma a utilizar TU e/ou IU. Os algoritmos são comparados a partir de simulações.
- Capítulo 4 – Trata do problema de estimação de velocidade angular a partir de medidas vetoriais. São apresentados algoritmos pertencentes às abordagens DA-VM e EA-VM. Os algoritmos apresentados que estão disponíveis na literatura consistem em EKF's para lidar com sistemas cuja dinâmica é contínua e as medidas são discretas (CD-EKF). Os algoritmos propostos, com a intenção de investigação, consistem em modificações daqueles disponíveis na literatura de forma a utilizar o UKF para dinâmica contínua e medidas discretas (CD-UKF). Os algoritmos são comparados a partir de simulações.

- Capítulo 5 – Apresenta um SDA autônomo para aplicação em satélites de baixo custo que tenham requisitos de acurácia grosseiros (em torno de 2°). Esse sistema emprega estimadores de atitude e velocidade angular e de *bias* de magnetômetro formulados no capítulo 5. Os estimadores do SDA são avaliados mediante medidas simuladas de magnetômetro e de sensores solares.
- Capítulo 6 – Apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 ESTIMAÇÃO DO ESTADO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Este capítulo tem o intuito de brevemente revisar o problema de estimação do estado de sistemas dinâmicos não-lineares utilizando o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented* (UKF). Essas ferramentas serão freqüentemente empregadas nos capítulos seguintes desta dissertação. A seção 2.1 apresenta o problema de estimação ótima (Bayesiana) de estado. A seção 2.2 revisa o EKF. A seção 2.3 apresenta a transformação *unscented* (TU), a integração *unscented* (IU) e as equações do UKF. Finalmente, a seção 2.4 apresenta os comentários finais do capítulo.

2.1 Filtragem Bayesiana

Seja o modelo em espaço de estados não-linear e discreto no tempo,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado; $\mathbf{z}_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de medidas; $\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^r$ é o vetor de entradas determinísticas; $\mathbf{f}: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^n$ e $\mathbf{h}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ são funções não-lineares; Os ruídos de estado $\{\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^n\}$ e de medidas $\{\mathbf{v}_k \in \mathfrak{R}^m\}$ são seqüências brancas de vetores aleatórios (VAs) Gaussianos descorrelacionadas entre si, com médias nulas e covariâncias \mathbf{Q}_k e \mathbf{R}_k , respectivamente. Considera-se o estado inicial $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$ descorrelacionado de $\{\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^n\}$ e de $\{\mathbf{v}_k \in \mathfrak{R}^m\}$. As equações (2.1) e (2.2) são referidas, respectivamente, como *equação de estado* e *equação de medidas*.

Segundo a abordagem Bayesiana, o problema de filtragem consiste em se computar a PDF condicional $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{1:k})$ do estado atual \mathbf{x}_k dada a seqüência de medidas $\mathbf{Z}_{1:k}$ obtidas desde o início do processo de estimação até o instante atual t_k .

As equações recursivas do filtro Bayesiano constituem um processo de dois estágios. Um deles corresponde à *propagação* temporal da *informação computada* pelo filtro durante o intervalo de tempo entre medidas consecutivas, enquanto que o outro é responsável por *atualizar* a informação propagada a partir de medidas. Considerando-se conhecida a PDF inicial $p(\mathbf{x}_0|\mathbf{Z}_0) = p(\mathbf{x}_0)$ ¹, o filtro Bayesiano discreto, que leva em conta o modelo em (2.1)-(2.2), é dado por (Arulampalam *et al.*, 2002)²,

Filtro Bayesiano discreto

1. **Propagação:** A PDF condicional do estado \mathbf{x}_{k+1} dada a seqüência de medidas $\mathbf{Z}_{1:k}$ é dada pela equação de Chapman-Kolmogorov (Papoulis e Pillai, 2002):

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}) = \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k) \cdot p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{1:k}) \cdot d\mathbf{x}_k \quad (2.3)$$

onde $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$ é obtida a partir da equação de estado (2.1) e das estatísticas do ruído de estado; $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{1:k})$ é a PDF condicional obtida no estágio de atualização da iteração anterior do filtro. Nota-se que em (2.3) considerou-se $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mathbf{Z}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$, o que se deve ao fato de (2.1) descrever um processo Markoviano de primeira ordem.

2. **Atualização:** Uma vez disponibilizado o vetor de medidas \mathbf{z}_{k+1} no instante t_{k+1} , a PDF condicional atualizada é dada pela regra de Bayes (Papoulis e Pillai, 2001):

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k+1}) = \frac{p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k})}{\int p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}) \cdot d\mathbf{x}_{k+1}} \quad (2.4)$$

onde $p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})$ é obtida a partir da equação de medidas (2.2) e das estatísticas do ruído de medidas; $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k})$ foi obtida no estágio de propagação. Nota-se que em (2.4) considerou-se $p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{Z}_{1:k}) = p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})$, pois segundo (2.2), \mathbf{z}_{k+1} não depende das medidas anteriores $\mathbf{Z}_{1:k}$. □

As equações (2.3) e (2.4), recursivamente, fornecem de forma conceitual a PDF condicional $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k+1})$, a partir da qual se pode computar uma estimativa ótima, que no sentido de *variância mínima* (ou *mínimo erro quadrático médio*) consiste na média condicional $E[\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k+1}]$ [vide teorema 5.3 em Jazwinski (1970)]. Soluções fechadas para a filtragem Bayesiana existem somente quando se consideram hipóteses simplificadoras sobre o sistema, como no caso do filtro de Kalman (KF) (Bar-Shalom e Li, 1993).

¹ \mathbf{Z}_0 denota a inexistência de informação medida na inicialização do processo de estimação.

² Uma apresentação conceitual do problema de filtragem Bayesiana para o caso em que o modelo de estado é contínuo e as medidas são amostradas é encontrada no capítulo 12 de Maybeck (1982).

O KF considera ruídos brancos Gaussianos e equações de estado e de medidas lineares e, dessa forma, o estado em cada instante consiste num VA Gaussiano³, o qual se caracteriza completamente através de suas média e covariância. Uma demonstração das equações do KF a partir das equações (2.3) e (2.4) é encontrada em Sarkka (2006). No que segue, são apresentadas as equações recursivas do KF.

Equações recursivas do KF

1. **Propagação.** Partindo-se da PDF condicional $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$ do estado \mathbf{x}_k obtida no estágio de atualização da iteração anterior, computam-se as médias e covariâncias a seguir. Demonstrações são encontradas no Apêndice A.

a. *Propagação do estado estimado:*

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}]' + \mathbf{Q}_k \quad (2.6)$$

b. *Predição das medidas:*

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}] \quad (2.7)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^z = E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}]' + \mathbf{R}_{k+1} \quad (2.8)$$

c. *Covariância cruzada entre estado e medidas:*

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{xz} = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}]' \quad (2.9)$$

2. **Atualização.** As equações de atualização linear da estimativa propagada são apresentadas a seguir. Demonstrações são encontradas em livros-textos sobre o assunto (Gelb, 1974; Jazwinski, 1970; Bar-Shalom e Li, 1993).

a. *Ganho de Kalman:*

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{xz} \cdot (\mathbf{P}_{k+1|k}^z)^{-1} \quad (2.10)$$

b. *Atualização:*

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \quad (2.11)$$

³ Um VA obtido por transformação linear sobre um VA Gaussiano é também Gaussiano [vide Peebles (1987), p.130].

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1|k}^z \cdot \mathbf{K}'_{k+1} \quad (2.12)$$

□

Os passos 1 e 2 apresentados acima fornecem, sem aproximações, a solução do problema de filtragem ótima no caso em que as equações de estado e de medidas são especificadas como lineares. Em aplicações de filtragem, dificilmente se lida com sistemas lineares. A solução mais conveniente do ponto de vista prático consiste em se aproximar as médias e covariâncias no passo 1. A forma tradicional de se obter tais aproximações corresponde ao uso de modelos linearizados por truncamento de série de Taylor em torno da melhor estimativa atual, o que é realizado pelo EKF. Outra solução corresponde ao uso da transformação *unscented* (TU) para se estimar diretamente as médias e covariâncias sem que seja necessário se obter previamente os modelos linearizados. Essa solução é conhecida como filtro de Kalman *unscented* (UKF).

2.2 Filtro de Kalman estendido

Linearizando, por truncamento de série de Taylor, a função \mathbf{f} em (2.1) em torno de $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ e a função \mathbf{h} em (2.2) em torno de $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ obtêm-se,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{F}_k \cdot (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) \approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{H}_{k+1} \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \quad (2.14)$$

onde \mathbf{F}_k e \mathbf{H}_{k+1} são matrizes Jacobianas dadas por,

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_k}} \quad \mathbf{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \quad (2.15)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.14) nas equações (2.5)-(2.9) do estágio de propagação do KF, obtêm-se as equações de propagação do EKF,

Propagação do estado estimado:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{u}_k) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{P}_{k|k} \cdot \mathbf{F}'_k + \mathbf{Q}_k \quad (2.17)$$

Predição das medidas:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^z = \mathbf{H}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1|k} \cdot \mathbf{H}'_{k+1} + \mathbf{R}_{k+1} \quad (2.19)$$

Covariância cruzada entre estado e medidas:

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{xz} = \mathbf{P}_{k+1|k} \cdot \mathbf{H}'_{k+1} \quad (2.20)$$

□

O estágio de atualização do EKF é dado pelas equações (2.10)-(2.12).

Este trabalho lida também com sistemas cujo modelo da evolução de estado é melhor descrito em tempo contínuo. Seja então a equação de estado não-linear em tempo contínuo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{w}(t) \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado; $\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R}^r$ é o vetor de entradas determinísticas; $\mathbf{f}: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é uma função não-linear; $\{\mathbf{w}(t) \in \mathfrak{R}^n\}$ é um ruído branco com média nula e densidade espectral $\mathbf{Q}(t)$. Como em (2.1), considera-se estado inicial com distribuição conhecida $\mathbf{x}(t_0) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}(t_0), \mathbf{P}(t_0))$ e decorrelacionado de $\{\mathbf{w}(t) \in \mathfrak{R}^n\}$ e de $\{\mathbf{v}_k \in \mathfrak{R}^m\}$.

A formulação apresentada acima para o EKF se aplica a sistemas modelados por equações de estado e de medidas discretas no tempo. No entanto, o movimento de atitude de veículos⁴, que consiste na aplicação deste trabalho, é descrito por equações diferenciais que correspondem a equações de estado contínuas no tempo. Já as medidas, nos sistemas de

⁴ Para detalhes sobre modelos que descrevem o movimento de satélites, vide Wiesel (1997).

medição atuais, são usualmente adquiridas de sensores em instantes discretos de tempo igualmente espaçados. Torna-se então conveniente uma formulação do EKF para sistemas modelados pela equação de estado (2.21) e pela equação de medidas (2.2), formulação essa conhecida como CD-EKF (*continuous-discrete extended Kalman filter*)⁵. O CD-EKF se distingue do EKF discreto apenas nas equações (2.16) e (2.17), as quais constituem a propagação do estado estimado. Essas equações são substituídas no CD-EKF pela integração de t_k a t_{k+1} , partindo-se da condição inicial $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$, das seguintes equações diferenciais (Gelb, 1974),

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}(t)' + \mathbf{Q}(t) \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{F}(t)$ é a matriz Jacobiana dada por,

$$\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(t)}} \quad (2.24)$$

Ao final da integração de (2.22)-(2.23), obtém-se a estimativa propagada denotada, como no caso discreto, por $(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k})$. Tal estimativa é então utilizada nos cálculos seguintes do filtro, que são idênticos aos do EKF discreto.

2.3 Filtro de Kalman *unscented*

O filtro de Kalman *unscented* (UKF), proposto por Julier e Uhlmann (1997), assim como o EKF, adota a estrutura do KF conforme apresentada na seção 2.1. No entanto, enquanto o EKF utiliza linearizações das equações de estado e de medidas para se calcular as

⁵ Discretizando-se o modelo (2.3), pode-se solucionar esse problema de estimação por meio do EKF discreto. No entanto, a obtenção de um modelo discreto acurado pode ter derivação analítica com grande complexidade.

médias e covariâncias em (2.5)-(2.9), o UKF as calcula por meio da transformação *unscented* (TU), a qual é apresentada em seguida.

Transformação *unscented*

A transformação *unscented* (TU) consiste num método de aproximação de média e covariância de variáveis aleatórias transformadas por função não-linear. Tal método foi proposto com o intuito de contornar os problemas advindos da linearização por truncamento de série de Taylor utilizada no EKF (Julier e Uhlmann, 2004). Exemplos desses problemas são: 1) modelos linearizados são confiáveis somente quando o modelo original é quase-linear; 2) linearização só pode ser aplicada quando as funções \mathbf{f} e \mathbf{h} em (2.1)-(2.2) são diferenciáveis; 3) o cálculo de Jacobianas pode ser trabalhoso e, nesse caso, sujeito a erros [como exemplo de complexidade no cálculo de Jacobianas, vide Apêndice C de Shorshi (1992)]. No que segue, apresenta-se a TU em sua forma original como proposta em Julier e Uhlmann (1997)⁶.

Seja $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{n_x}$ um VA de média $\bar{\mathbf{x}}$ e covariância \mathbf{P}^x e seja $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{n_y}$ um segundo VA dado por $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{g}: \mathfrak{R}^{n_x} \rightarrow \mathfrak{R}^{n_y}$ é, em geral, uma função não-linear e não-diferenciável. Aproximações para a média $\bar{\mathbf{y}}$ e a covariância \mathbf{P}^y de \mathbf{y} e para a covariância cruzada \mathbf{P}^{xy} entre \mathbf{x} e \mathbf{y} podem ser obtidas mediante a TU, que consiste no seguinte procedimento (Sarkka, 2007):

1. Geração da matriz χ contendo $2 \cdot n_x + 1$ pontos- σ :

$$\chi = [\bar{\mathbf{x}} \ \bar{\mathbf{x}} \ \bar{\mathbf{x}} \ \dots \ \bar{\mathbf{x}}] + \sqrt{n_x + \kappa} \cdot [\mathbf{0}_{n_x \times 1} \quad \sqrt{\mathbf{P}^x} \quad -\sqrt{\mathbf{P}^x}] \quad (2.25)$$

A coluna i da matriz χ , denotada por χ_i , consiste no i -ésimo ponto- σ ; $\sqrt{\mathbf{P}^x}$ é uma matriz tal que $\mathbf{P}^x = \sqrt{\mathbf{P}^x} \cdot \sqrt{\mathbf{P}^x}'$. A matriz $\sqrt{\mathbf{P}^x}$ é chamada de raiz quadrada de \mathbf{P}^x ⁷; e κ é um fator de escala. A escolha $\kappa = 3 - n_x$ leva a um erro mínimo na estimação das estatísticas de \mathbf{y} quando \mathbf{x} tem distribuição Gaussiana (Julier et al., 2000).

⁶ Outras formas da TU correspondem a escolhas distintas para o conjunto de pontos- σ . Por exemplo, vide apêndices III e IV de Julier e Uhlmann (2004).

⁷ Neste trabalho, utiliza-se como raiz quadrada de uma matriz o fator triangular inferior de sua decomposição de Cholesky (Press et al., 1992).

2. *Transformação dos pontos- σ através de \mathbf{g} :*

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \ \mathbf{g}(\mathbf{x}_2) \ \mathbf{g}(\mathbf{x}_3) \ \dots \ \mathbf{g}(\mathbf{x}_{2n_x+1})] \quad (2.26)$$

3. *Aproximações de $\bar{\mathbf{y}}$, \mathbf{P}^x e \mathbf{P}^{xy} :*

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=1}^{2n_x+1} W_i^m \cdot \mathbf{y}_i = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{W}_m \quad (2.27)$$

$$\mathbf{P}^y \approx \sum_{i=1}^{2n_x+1} W_i^m \cdot (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) \cdot (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Y}' \quad (2.28)$$

$$\mathbf{P}^{xy} \approx \sum_{i=1}^{2n_x+1} W_i^m \cdot (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T = \mathbf{X} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Y}' \quad (2.29)$$

onde as matrizes de pesos \mathbf{W}_m e \mathbf{W} são dadas por (Apêndice I-A, Sarkka (2007)),

$$\mathbf{W}_m = [W_1^m \ W_2^m \ \dots \ W_{2n_x+1}^m]' \quad (2.30)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{I}_{n_x} - [\mathbf{W}_m \ \mathbf{W}_m \ \dots \ \mathbf{W}_m]) \cdot \text{diag}(\mathbf{W}_m) \cdot (\mathbf{I}_{n_x} - [\mathbf{W}_m \ \mathbf{W}_m \ \dots \ \mathbf{W}_m])' \quad (2.31)$$

e os componentes de \mathbf{W}_m são,

$$W_1^m = \frac{\kappa}{n_x + \kappa} \quad (2.32)$$

$$W_i^m = \frac{1}{2(n_x + \kappa)} \quad i > 1 \quad (2.33)$$

□

A TU originalmente proposta requer o ajuste apenas do parâmetro κ . Essa é a abordagem seguida no presente trabalho. Entretanto, a formulação da TU em Wan e van der Merwe (2001) inclui outros parâmetros, comumente denotados por α e β , que podem ser úteis na melhoria de acurácia das aproximações da média e da covariância *a posteriori*. Nas aplicações aqui estudadas, observou-se pouca influência dos valores de α e β sobre a acurácia dos filtros e, sendo assim, adotou-se $\alpha = \beta = 0$.

O procedimento acima será denotado daqui em diante por ⁸,

$$[\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{P}^y, \mathbf{P}^{xy}] = \text{TU}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}^x, \mathbf{g}(\cdot)) \quad (2.34)$$

⁸ Em casos onde não se requer a covariância cruzada \mathbf{P}^{xy} , a TU será denotada por $[\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{P}^y] = \text{TU}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}^x, \mathbf{g}(\cdot))$.

Integração unscented

Seja $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ um VA no instante t com média $\bar{\mathbf{x}}(t) = E[\mathbf{x}(t)]$ e covariância $\mathbf{P}(t) = E[(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)) \cdot (\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t))']$. Seja a equação diferencial não-linear estocástica $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{w}(t)$, em que $\{\mathbf{w}(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}\}$ é um ruído branco de média nula e covariância $\mathbf{Q}(t) \cdot \delta(t - \tau)$. Aproximações para a média $\bar{\mathbf{x}}(t_f)$ e a covariância $\mathbf{P}(t_f)$ são dadas pela integração *unscented* (IU) ⁹, que consiste na integração de t_i a t_f das seguintes equações diferenciais partindo-se das condições iniciais $\mathbf{x}(t_i)$ e $\mathbf{P}(t_i)$ (Sarkka, 2007):

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}}_m \quad (2.35)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\chi}(t) \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t)' + \boldsymbol{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mathcal{W}} \cdot \boldsymbol{\chi}(t)' + \mathbf{Q}(t) \quad (2.36)$$

onde os pesos $\boldsymbol{\mathcal{W}}_m$ e $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ são dados respectivamente em (2.30) e (2.31) e,

$$\boldsymbol{\chi}(t) = [\bar{\mathbf{x}}(t) \ \bar{\mathbf{x}}(t) \ \bar{\mathbf{x}}(t) \ \dots \ \bar{\mathbf{x}}(t)] + \sqrt{n_x + \kappa} \cdot [\mathbf{0}_{n_x \times 1} \ \vdots \ \sqrt{\mathbf{P}(t)} \ \vdots \ -\sqrt{\mathbf{P}(t)}] \quad (2.37)$$

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = [\mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}_1(t)) \ \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}_2(t)) \ \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}_3(t)) \ \dots \ \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}_{2n_x+1}(t))] \quad (2.38)$$

Ao final da integração de (2.35)-(2.36), obtém-se $\bar{\mathbf{x}}(t_f)$ e $\mathbf{P}(t_f)$. O procedimento acima será denotado daqui em diante por,

$$[\bar{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{P}(t_f)] = \text{IU}(\bar{\mathbf{x}}(t_i), \mathbf{P}(t_i), \mathbf{g}(\cdot), \mathbf{Q}(t)) \quad (2.39)$$

UKF discreto

Semelhantemente ao EKF, o UKF (*unscented Kalman filter*) utiliza aproximações para as médias e covariâncias no estágio de propagação do KF dado pelas equações (2.5)-(2.9). No entanto, enquanto o EKF aproxima as equações de estado e de medidas por linearizações para,

⁹ Em Sarkka (2007), esse procedimento de aproximação é chamado de *predição de média e covariância*.

dessa forma, aproximar os momentos, o UKF realiza tais aproximações diretamente através do emprego da TU, ou seja,

Propagação do estado estimado:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}, \mathbf{f}(\cdot, \mathbf{u}_k)) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k} + \mathbf{Q}_k \quad (2.41)$$

Predição das medidas/ Covariância cruzada entre estado e medidas:

$$[\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k}^z, \mathbf{P}_{k+1|k}^{xz}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}, \mathbf{h}(\cdot)) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^z = \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k}^z + \mathbf{R}_{k+1} \quad (2.43)$$

□

O estágio de atualização do UKF, como no EKF, é dado pelas equações (2.10)-(2.12).

Como os ruídos de estado e de medidas em (2.1) e (2.2), respectivamente, são aditivos, então seus efeitos sobre o processo de estimação são acrescentados simplesmente através das adições de covariâncias em (2.41) e (2.43) (Wan e van der Merwe, 2001). No caso geral, em que os ruídos são multiplicativos, seria necessário aumentar o vetor de estado de forma a incluir os componentes dos vetores de ruído [para detalhes, vide Tabela 7.3.1 em Wan e van der Merwe (2001)]. Uma comparação entre as abordagens com e sem estado aumentado é encontrada em Wu *et al.* (2005). Nesse caso, a TU seria aplicada ao estado aumentado, o que resultaria num algoritmo com maior carga computacional.

UKF contínuo-discreto

O UKF foi originalmente proposto para estimar estado de sistemas modelados por equações de estado e de medidas discretas no tempo (Julier e Uhlmann, 1997). Posteriormente, Julier e Uhlmann (2004) aplicaram o UKF à estimação de estado de um sistema cuja equação de estado é modelada em tempo contínuo; no entanto, a abordagem

empregada pelos autores consistiu simplesmente em discretizar a equação de estado mediante aproximação de Euler e aplicar a formulação original ao modelo discreto resultante.

A formulação do UKF para sistemas modelados por equação de estado contínua e equação de medidas em tempo discreto será denotada por CD-UKF (*continuous-discrete unscented Kalman filter*). O CD-UKF apresentado em seguida, o qual será adotado neste trabalho, foi proposto por Sarkka (2007) e consiste em se utilizar a IU, em substituição à TU em (2.40), no estágio de propagação do estado estimado. Sendo assim, considerando a equação de estado contínua no tempo em (2.21), o estágio de propagação temporal de t_k a t_{k+1} do CD-UKF é dado, conforme (2.39), por,

Propagação do estado estimado:

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}] = \text{IU}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}, \mathbf{f}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{Q}(t_k)) \quad (2.44)$$

Predição das medidas/Covariância cruzada entre estado e medidas:

$$[\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k}^z, \mathbf{P}_{k+1|k}^{xz}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{P}_{k+1|k}, \mathbf{h}(\cdot)) \quad (2.45)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^z = \bar{\mathbf{P}}_{k+1|k}^z + \mathbf{R}_{k+1} \quad (2.46)$$

□

O estágio de atualização do CD-UKF é dado pelas equações (2.10)-(2.12).

O CD-UKF apresentado acima foi comparado com o UKF discreto em Sarkka (2007) através de uma aplicação em que é simulada a reentrada atmosférica; tal sistema é modelado com estado contínuo e medidas discretas. Nessa comparação, o CD-UKF se mostrou superior em termos de acurácia, especialmente quando se considerou valores maiores para o período de amostragem das medidas.

2.4 Comentários

Revisaram-se aqui o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented* (UKF), ferramentas que serão freqüentemente utilizadas ao logo deste trabalho.

A grande maioria dos estimadores de atitude e de velocidade angular de satélites disponíveis na literatura se baseia no EKF. Investiga-se aqui o uso do UKF em substituição ao tradicional EKF.

Outras ferramentas de estimação de estado mais sofisticadas do que o UKF ainda carecem de aplicações na área de determinação de atitude de veículos espaciais. Dentre elas destacam-se os filtros de Partículas (Arulampalan *et al.*, 2002) e os filtros híbridos *particle-UKF* (Wan e Merwe, 2001), que são técnicas que atualmente atraem a atenção de pesquisadores da área de filtragem.

3 ESTIMAÇÃO DE ATITUDE

Este capítulo devota-se à investigação de algoritmos para estimação de atitude em 3 eixos a partir de medidas vetoriais do campo geomagnético e da direção do Sol e segundo a abordagem de variância mínima (MV)¹. São consideradas 4 representações de atitude distintas: quatérnio de rotação, ângulos de Euler, matriz de cossenos diretores (DCM) e parâmetros de Rodrigues modificados (MRP). Para cada uma dessas representações, revisa-se um estimador existente na literatura e, a título de contribuição, propõe-se outro tendo em vista o uso da transformação *unscented* (TU) e da integração *unscented* (IU) [vide capítulo 2]. A Tabela 3.1 lista os estimadores a serem estudados.

Tabela 3.1 Estimadores MV de atitude em 3 eixos que utilizam medidas vetoriais.

Parametrização	Estimadores revisados	Estimadores propostos
Quatérnio	QEKF (Bar-Itzhack e Oshman, 1985)	QUKF
Ângulos de Euler	EEKF (Bar-Itzhack e Idan, 1987)	EUKF
DCM	DKF (Bar-Itzhack e Reiner, 1984)	DKFUO
MRP/Quatérnio	MEKF (Crassidis e Markley, 1996)	MUKF

A seção 3.1 define o problema de estimação de atitude. Em seguida, a seção 3.2 apresenta as formulações dos estimadores. A seção 3.3 os compara através de resultados obtidos com medidas simuladas. Por fim, a seção 3.4 apresenta uma síntese dos estudos realizados no capítulo.

3.1 Definição do problema

O problema de estimação de atitude em 3 eixos a partir de medidas vetoriais e segundo a abordagem MV é definido a seguir (Wahba, 1964). Seja S_B um sistema de coordenadas

¹ A classificação de métodos de estimação de atitude adotada neste trabalho é apresentada no item 1.1.1.

Cartesianas (SCC) fixo ao corpo do satélite e S_R algum SCC de referência ². O sistema S_B gira, no instante t , com velocidade angular em relação a S_R representada em S_B por $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathfrak{R}^3$. Um conjunto de m vetores observado no instante de tempo t , quando projetado em S_B e em S_R , dá origem aos conjuntos $\mathcal{B}(t) = \{\mathbf{b}_i(t) \in \mathfrak{R}^3, i = 1, 2, \dots, m\}$ e $\mathcal{R}(t) = \{\mathbf{r}_i(t) \in \mathfrak{R}^3, i = 1, 2, \dots, m\}$, respectivamente; m é o número de pares de *medidas vetoriais* $(\mathbf{b}_i(t), \mathbf{r}_i(t))$. Os elementos de $\mathcal{B}(t)$ e de $\mathcal{R}(t)$ são as representações das medidas vetoriais em S_B e em S_R , respectivamente. Deseja-se, a partir de $\mathcal{B}(t)$ e $\mathcal{R}(t)$, obter uma estimativa MV do vetor $\mathbf{p}(t) \in \mathfrak{R}^n$ que parametriza a DCM, $\mathbf{D}(\mathbf{p}(t))$, a qual transforma a representação das medidas vetoriais de S_R para S_B . Os componentes de $\mathbf{p}(t)$ constituem uma determinada parametrização de atitude (Wertz, 1978; Shuster, 1993). Os estimadores estudados aqui consideram as parametrizações por quatérnio de rotação, por ângulos de Euler, por parâmetros de Rodrigues modificados (MRP) e pelos próprios elementos da DCM.

A estimação de \mathbf{p} se baseia na seguinte equação de medidas discreta no tempo e, de forma geral, não-linear:

$$\mathbf{b}_{i,k+1} = \mathbf{D}(\mathbf{p}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1} \quad (3.1)$$

onde i identifica cada par de medida vetorial. Neste trabalho, $i = 1$ identifica o vetor campo geomagnético e $i = 2$ se refere ao vetor unitário na direção do Sol. O índice $k + 1$ identifica o instante discreto de tempo t_{k+1} . O ruído de medidas, $\{\delta \mathbf{b}_{i,k+1}\}$, é considerado uma seqüência branca de média nula e covariância $\mathbf{R}_{i,k+1}$.

A equação de estado utilizada na propagação das estimativas de \mathbf{p} entre os instantes de amostragem consecutivos se baseia no modelo de cinemática de atitude, que assume formas

² Neste trabalho, o sistema S_B adotado está centrado no centro de massa do satélite e seus eixos estão orientados conforme ilustrado na Figura 1.1. O sistema S_R adotado é o sistema ECI (Earth Centered Inertial) (Wertz, 1978).

distintas para parametrizações distintas (Wertz, 1978). Tal modelo é dado, de forma geral, pela equação diferencial:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) \quad (3.2)$$

Como a velocidade angular verdadeira, $\boldsymbol{\omega}(t)$, requerida em (3.2) é desconhecida, torna-se necessário medi-la. Considera-se aqui que a velocidade angular verdadeira é modelada simplesmente por ³,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) + \delta\boldsymbol{\omega}(t) \quad (3.3)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ é a medida de velocidade angular e $\{\delta\boldsymbol{\omega}(t)\}$ é um ruído branco com média nula e densidade espectral de potência constante \mathbf{Q} . A versão discreta desse modelo é dada por $\boldsymbol{\omega}_k = \hat{\boldsymbol{\omega}}_k + \delta\boldsymbol{\omega}_k$, onde $\{\delta\boldsymbol{\omega}_k\}$ é uma seqüência branca de média nula e covariância \mathbf{Q} .

Os estimadores estudados neste capítulo são estruturados conforme ilustra o diagrama de blocos na Figura 3.1. As medidas vetoriais no instante t_{k+1} , $(\mathbf{b}_{i,k+1}, \mathbf{r}_{i,k+1})$, e a informação de velocidade angular amostrada no instante t_k , $\hat{\boldsymbol{\omega}}_k$, são utilizadas na obtenção da estimativa MV, $\hat{\mathbf{p}}_{k+1|k+1}$, e da covariância do correspondente erro de estimação, $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$.

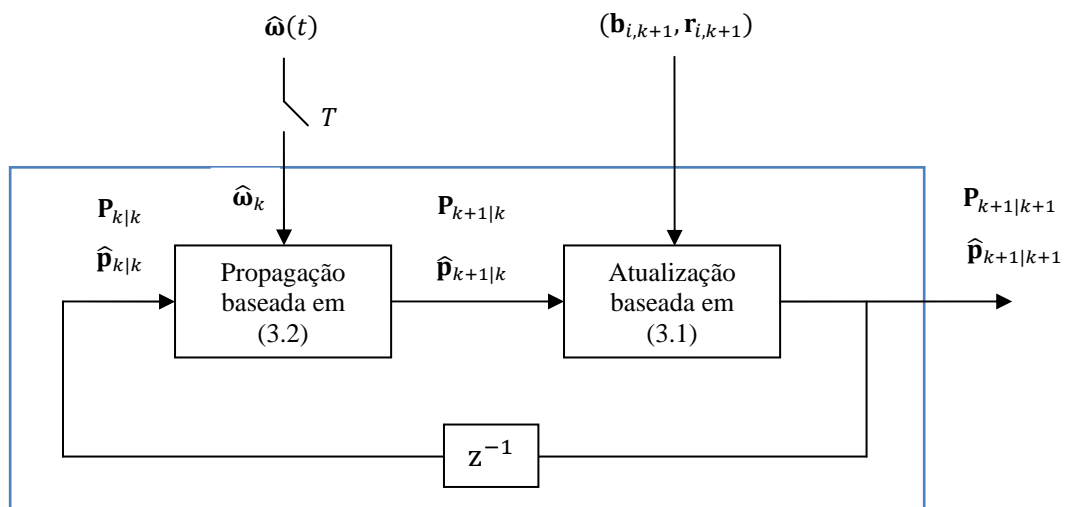


Figura 3.1 Estrutura dos estimadores de atitude.

³ Na prática, quando se utiliza girômetros, faz-se necessário o uso de um modelo mais realista para os distúrbios de medidas de velocidade angular que considere a existência de deriva [vide Wertz (1978), pp. 266-270].

A escolha da parametrização \mathbf{p} consiste na primeira distinção entre os diversos métodos MV possíveis para se resolver o problema posto acima. A DCM $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ pertence ao grupo tridimensional ortonormal $SO(3)$ e, dessa forma, a dimensão de \mathbf{p} deve ser $n \geq 3$ (Stuelpnagel, 1964). Os nove elementos de $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ constituem a parametrização fundamental de atitude, a qual permite a formulação linear das equações de estado (3.2) e de medidas (3.1), mas, no entanto, como há dependências entre seus elementos, exige-se que seu estimador incorpore algum mecanismo para garantir a ortonormalidade da estimativa de $\mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}})$ (Bar-Itzhack e Reiner, 1984). Já as parametrizações tridimensionais (por exemplo, ângulos de Euler e MRP (Shuster, 1993)), embora seus componentes sejam independentes entre si, apresentam singularidades para certas rotações. O quatérnio de rotação, $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^4$, tem a menor dimensão possível para uma parametrização que não apresente singularidades e seu modelo de cinemática é linear (Wertz, 1978), características que o fazem uma escolha bastante popular para \mathbf{p} (Lefferts *et al.*, 1982; Bar-Itzhack e Oshman, 1985; Psiaki, 2000; Choukroun *et al.*, 2002).

3.2 Estimadores de atitude

Em seguida são apresentadas as formulações dos estimadores MV listados na Tabela 3.1, tendo-se em vista o uso de medidas vetoriais do campo geomagnético ($i = 1$) e da direção do Sol ($i = 2$).

3.2.1 Estimação de quatérnio

O vetor de estado dos estimadores de quatérnio de rotação, QEKF e QUKF, é dado por $\mathbf{q} = [q_1 \mathbf{e}']'$, onde q_1 e $\mathbf{e} = [q_2 \ q_3 \ q_4]'$ são as representações escalar e vetorial, respectivamente, dos componentes real e imaginário de \mathbf{q} ⁴.

⁴ Vide definição do quatérnio de rotação em Wertz (1978), p. 414.

Substituindo o vetor de parâmetros \mathbf{p}_{k+1} em (3.1) por \mathbf{q}_{k+1} , obtém-se a *equação de medidas* não-linear e discreta no tempo dos estimadores de quatérnio de rotação:

$$\mathbf{b}_{i,k+1} = \mathbf{D}(\mathbf{q}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1} \quad (3.4)$$

onde,

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_{k+1}) = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & 2(q_2q_4 - q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 - q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_4q_3 + q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 + q_1q_3) & 2(q_4q_3 - q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}_{k+1} \quad (3.5)$$

O modelo de cinemática de atitude para o quatérnio de rotação é dado pela seguinte equação diferencial linear (Wertz, 1978):

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{q}(t) \quad (3.6)$$

onde,

$$\mathbf{\Omega}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}(t)' \\ \boldsymbol{\omega}(t) & -[\boldsymbol{\omega}(t) \times] \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e $[\boldsymbol{\omega}(t) \times]$ é a *matriz produto vetorial* referente ao vetor $\boldsymbol{\omega}(t)$ [vide notação na Lista de Símbolos].

Integrando (3.6) de t_k a t_{k+1} , obtém-se:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \cdot \mathbf{q}_k \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$ é a matriz de transição de estado. Considerando-se que $\boldsymbol{\omega}(t)$ seja constante durante o intervalo de tempo $T = t_{k+1} - t_k$ entre amostragens sucessivas das medidas vetoriais, essa matriz é dada por:

$$\mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) = e^{\mathbf{\Omega}_k \cdot T} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{\Omega}_k$ é computada por (3.7), mas utilizando $\boldsymbol{\omega}_k$ em vez de $\boldsymbol{\omega}(t)$. Substituindo, então, (3.3) em (3.9),

$$\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k) = e^{(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k + \delta\boldsymbol{\Omega}_k) \cdot T} = e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot e^{\delta\boldsymbol{\Omega}_k \cdot T} \quad (3.10)$$

onde as matrizes $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k$ e $\delta\boldsymbol{\Omega}_k$ são dadas por (3.7), porém substituindo $\boldsymbol{\omega}(t)$ por $\hat{\boldsymbol{\omega}}_k$ e $\delta\boldsymbol{\omega}_k$, respectivamente. Representando o segundo fator do lado direito de (3.10) pela correspondente série de potências, obtém-se:

$$\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k) = e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot (\mathbf{I}_4 + \delta\boldsymbol{\Omega}_k \cdot T + \dots) \quad (3.11)$$

Considerando-se que $\delta\boldsymbol{\omega}_k$ e T sejam ambos pequenos, o truncamento da série em (3.11) após termos de primeira ordem permite que (3.8) seja aproximada por:

$$\mathbf{q}_{k+1} \approx e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot \mathbf{q}_k + e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}_k \cdot T \cdot \mathbf{q}_k \quad (3.12)$$

Pode-se verificar que,

$$\delta\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} \quad (3.13)$$

onde,

$$\boldsymbol{\Xi} \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{e}' \\ [\mathbf{e} \times] + q_1 \cdot \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Sendo assim, utilizando (3.13) na manipulação do segundo termo do lado direito de (3.12), finalmente se obtém a seguinte *equação de estado* discreta no tempo:

$$\mathbf{q}_{k+1} = e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot \mathbf{q}_k + \frac{T}{2} e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot \boldsymbol{\Xi}_k \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_k \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{\Xi}_k$ é dado por (3.14), mas utilizando o quatérnio verdadeiro no instante t_k , \mathbf{q}_k , no lugar de \mathbf{q} . Para fins de implementação dos estimadores de quatérnio, a covariância \mathbf{Q}_k^q do ruído de estado (segundo termo à direita em (3.15)) é aproximada por:

$$\mathbf{Q}_k^q \cong \mathbf{\Gamma}_k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}_k' \quad (3.16)$$

onde,

$$\mathbf{\Gamma}_k = \frac{T}{2} e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k \cdot T} \cdot \hat{\mathbf{\Xi}}_k \quad (3.17)$$

e $\hat{\mathbf{\Xi}}_k$ é computada por (3.14), porém utilizando $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}$ no lugar de \mathbf{q} .

A exponencial matricial que define a matriz de transição de estado em (3.9) é aqui computada por [(Wertz, 1978), p. 567]:

$$e^{\boldsymbol{\Omega}_k \cdot T} = \cos\left(\omega_k \cdot \frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{I}_4 + \frac{1}{\omega_k} \sin\left(\omega_k \cdot \frac{T}{2}\right) \cdot \boldsymbol{\Omega}_k \quad (3.18)$$

onde $\omega_k = \|\boldsymbol{\omega}_k\|$.

O quatérnio de rotação apresenta norma unitária e, dessa forma, seus componentes obedecem à restrição $\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} = 1$. No entanto, a atualização linear do KF, por envolver a operação de soma, não garante que as estimativas de \mathbf{q} mantenham essa propriedade ao longo da estimação. Na literatura sobre estimação de atitude, encontram-se em geral três formas distintas de lidar com tal restrição. A mais simples delas consiste no uso de normalização Euclidiana das estimativas após o estágio de atualização aditiva (Bar-Itzhack e Oshman, 1985). Na literatura, refere-se a essa abordagem por “força bruta”. Outra forma consiste em utilizar $\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} = 1$ como uma pseudo-medida (Bar-Itzhack *et al.*, 1991), o que, embora evite soluções *ad hoc*, não apresenta bons resultados em termos de convergência. Por fim, a terceira solução se dá através do uso da abordagem multiplicativa (Lefferts *et al.*, 1982). Nessa abordagem, a atualização do quatérnio é realizada através do produto entre um *erro de*

quatérnio e um *quatérnio de referência* cujas normas são consideradas unitárias. Nesse caso, o quatérnio atualizado é, por definição, unitário.

Em seguida são apresentados os estimadores QEKF e QUKF, os quais utilizam normalização Euclidiana para garantir que as estimativas tenham normas unitárias. A subseção 3.2.4 apresenta dois estimadores, MEKF e MUKF, que seguem a abordagem multiplicativa.

QEKF (Bar-Itzhack e Oshman, 1985)

Mediante uso do EKF – revisado no capítulo 2 – e tendo-se em vista a equação de estado linear (3.15) e a equação de medidas não-linear (3.4), obtêm-se os estágios de propagação e de atualização do QEKF ⁵. Para garantir que as normas de suas estimativas sejam unitárias, utiliza-se normalização Euclidiana. A estimativa normalizada, $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}^* = \hat{\mathbf{q}}_{k|k} / \|\hat{\mathbf{q}}_{k|k}\|$, apresenta um erro cuja covariância é aproximada no QEKF simplesmente por $\mathbf{P}_{k+1|k+1}^* = \mathbf{P}_{k+1|k+1}$.

O QEKF requer a matriz Jacobiana das medidas,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^q = \left. \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k}} \quad (3.19)$$

a qual se deriva de forma explícita no Apêndice B.

A Tabela 3.2 apresenta o QEKF.

⁵ QEKF – *Quaternion Extended Kalman Filter*.

Tabela 3.2 Estimador de quatérnio de rotação – QEKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{q}}_{0 0}^* = \hat{\mathbf{q}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0}^* = \mathbf{P}_0^q$
1a - Propagação do estado estimado	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k} = e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k.T} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{k k}^*$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = (e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k.T}) \cdot \mathbf{P}_{k k}^* \cdot (e^{\hat{\boldsymbol{\Omega}}_k.T})' + \mathbf{Q}_k^q$
1b – Predição das medidas ^(a)	$\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} = \left[(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1})' \quad (\mathbf{D}(\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1})' \right]'$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = (\mathbf{H}_{k+1}^q) \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^q)' + \mathbf{R}_{k+1}$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{qb} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^q)'$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{qb} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{q}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \left([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} \right)$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Normalização	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1}^* = \hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1} / \ \hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1}\ $ $\mathbf{P}_{k+1 k+1}^* = \mathbf{P}_{k+1 k+1}$
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

$$^{(a)} \mathbf{H}_{k+1}^q = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^q \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^q \end{bmatrix}; \mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$$

QUKF

A título de contribuição, propõe-se o estimador QUKF ⁶, que utiliza o UKF – revisado no capítulo 2 – tendo-se em vista a equação de estado (3.15) e a equação de medidas (3.4), de forma a se obter seus estágios de propagação e de atualização. Assim como o QEKF, o QUKF também emprega normalização Euclidiana, porém de forma diferente. Considerando-se a estimativa atualizada como sendo um vetor Gaussiano, $\hat{\mathbf{q}} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{q}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$, então a média, $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}^*$, e a covariância, $\mathbf{P}_{k|k}^*$, do vetor aleatório $\hat{\mathbf{q}}^* = \hat{\mathbf{q}} / \|\hat{\mathbf{q}}\|$ são aproximadas pela TU (revisada no capítulo 2):

$$[\hat{\mathbf{q}}_{k|k}^*, \mathbf{P}_{k|k}^*] = \text{TU}(\hat{\mathbf{q}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}, \mathbf{g}(\cdot)); \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} / \|\mathbf{q}\| \quad (3.20)$$

⁶ QUKF – *Quaternion Unscented Kalman Filter*.

O uso da TU em (3.20) na normalização das estimativas consiste numa contribuição original deste trabalho.

Notar que a TU em (3.20) computa a estimativa $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}^*$ através de uma operação de média ponderada [vide seção 2.3] e, sendo assim, essa estimativa não se trata exatamente do vetor de norma unitária $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}/\|\hat{\mathbf{q}}_{k|k}\|$. Logo, espera-se que o QUKF produza estimativas com normalidade degradada em relação às estimativas do QEKF.

A Tabela 3.3 apresenta o QUKF. Como a equação de estado (3.15) é linear, dispensa-se aqui o uso da TU na propagação das estimativas.

Tabela 3.3 Estimador de quatérnio de rotação – QUKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1, 2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{q}}_{0 0} = \hat{\mathbf{q}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = \mathbf{P}_0^q$
1a – Propagação do estado estimado	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k} = e^{\hat{\Omega}_{k,T}} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{k k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = (e^{\hat{\Omega}_{k,T}}) \cdot \mathbf{P}_{k k} \cdot (e^{\hat{\Omega}_{k,T}})' + \mathbf{Q}_k^q$
1b – Predição das medidas/cov. cruzada ^(a)	$[\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b, \mathbf{P}_{k+1 k}^{qb}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}, \mathbf{h}_{k+1}^q(\cdot))$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b + \mathbf{R}_{k+1}$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{qb} (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{q}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot ([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Normalização ^(b)	$[\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1}^*, \mathbf{P}_{k+1 k+1}^*] = \text{TU}(\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1}, \mathbf{P}_{k+1 k+1}, \mathbf{g}(\cdot))$
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

$$^{(a)} \quad \mathbf{h}_{k+1}^q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1} \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$$

$$^{(b)} \quad \mathbf{g}(\cdot) - \text{vide (3.20)}.$$

3.2.2 Estimação de ângulos de Euler

Considera-se a estimação de ângulos de Euler na seqüência de rotações 3 – 2 – 1. O vetor de estado dos estimadores de ângulos de Euler, EEKF e EUKF, é dado por $\mathbf{a} = [\psi \ \theta \ \varphi]'$.

Substituindo o vetor de parâmetros \mathbf{p}_{k+1} em (3.1) por \mathbf{a}_{k+1} , obtém-se a *equação de medidas* não-linear e discreta no tempo dos estimadores de ângulos de Euler:

$$\mathbf{b}_{i,k+1} = \mathbf{D}(\mathbf{a}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1} \quad (3.21)$$

onde (Wertz, 1978),

$$\mathbf{D}(\mathbf{a}_{k+1}) = \begin{bmatrix} c\psi \cdot c\theta & s\psi \cdot c\theta & -s\theta \\ c\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi - s\psi \cdot c\varphi & s\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi + c\psi \cdot c\varphi & c\theta \cdot s\varphi \\ c\psi \cdot s\theta \cdot c\varphi + s\psi \cdot s\varphi & s\psi \cdot s\theta \cdot c\varphi - c\psi \cdot s\varphi & c\theta \cdot c\varphi \end{bmatrix}_{k+1} \quad (3.22)$$

onde s e c denotam aqui as funções *seno* e *coseno*, respectivamente.

O modelo de cinemática de atitude para os ângulos de Euler (3 – 2 – 1) é dado pela seguinte equação diferencial não-linear (Wertz, 1978):

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{f}^a(\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) \quad (3.23)$$

onde,

$$\mathbf{f}^a(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{G}^a(\mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.24)$$

e, denotando a função *tangente* por tg ,

$$\mathbf{G}^a(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & s\varphi/c\theta & c\varphi/c\theta \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 1 & \text{tg } \theta \cdot s\varphi & \text{tg } \theta \cdot c\varphi \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Substituindo a velocidade angular modelada por (3.3) em (3.23), obtém-se a *equação de estado* contínua no tempo utilizada pelos estimadores de ângulos de Euler,

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{f}^a(\mathbf{a}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)) + \mathbf{G}^a(\mathbf{a}(t)) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}(t) \quad (3.26)$$

Considerando que $\{\mathbf{a}(t)\}$ e $\{\delta\boldsymbol{\omega}(t)\}$ sejam estatisticamente independentes, então a média de $\{\mathbf{G}^a(\mathbf{a}(t)).\delta\boldsymbol{\omega}(t)\}$ é nula. Sua auto-covariância, $E \left[\left(\mathbf{G}^a(\mathbf{a}(t + \tau)).\delta\boldsymbol{\omega}(t + \tau) \right) \cdot \left(\mathbf{G}^a(\mathbf{a}(t)).\delta\boldsymbol{\omega}(t) \right)' \right] = \mathbf{Q}^a(t). \delta(\tau)$, tem valor dependente do estado verdadeiro desconhecido. Nesse caso, para que os estimadores possam computar $\mathbf{Q}^a(t)$, utiliza-se $\hat{\mathbf{a}}_{k|k}$ no lugar de $\mathbf{a}(t)$ obtendo-se assim a matriz constante por partes:

$$\mathbf{Q}^a(t) \cong \boldsymbol{\Gamma}(t). \mathbf{Q}. \boldsymbol{\Gamma}(t)' \quad (3.27)$$

onde $\boldsymbol{\Gamma}(t) = \mathbf{G}^a(\hat{\mathbf{a}}_{k|k})$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$.

A parametrização por ângulos de Euler permite a aplicação direta de um estimador de estados na estimação de atitude, pois, por se tratar de uma parametrização mínima, não há restrições a respeitar no espaço de estado. No entanto, há a desvantagem bem conhecida na literatura de que tal parametrização se torna singular para certos valores de rotação. Para a seqüência 3 – 2 – 1, esses valores são de $\pm 90^\circ$ em torno do eixo 2 (Wertz, 1978).

Em seguida são apresentados os estimadores EEKF e EUKF.

EEKF (Bar-Itzhack e Idan, 1987)

Utilizando o CD-EKF – revisado no capítulo 2 – tendo-se em vista a equação de estado (3.26) e a equação de medidas (3.21), obtém-se o estimador EEKF ⁷ apresentado na Tabela 3.4.

O EEKF requer as matrizes Jacobianas do estado e das medidas, derivadas de forma explícita no Apêndice B e representadas aqui, respectivamente, por:

$$\mathbf{F}^a(\hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^a(\mathbf{a}, \hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}(t)} \quad (3.28)$$

⁷ EEKF – Euler Extended Kalman Filter.

e

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^a = \left. \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{k+1|k}} \quad (3.29)$$

Tabela 3.4 Estimador de ângulos de Euler – EEKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{a}}_{0 0} = \hat{\mathbf{a}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = \mathbf{P}_0^a$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = \mathbf{f}^a(\hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}_k)$ $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}^a(\hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}_k) \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}^a(\hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}_k)' + \mathbf{Q}^a(t)$
1b – Predição das medidas ^(b)	$\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} = \left[(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{a}}_{k+1 k}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1})' \quad (\mathbf{D}(\hat{\mathbf{a}}_{k+1 k}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1})' \right]'$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = (\mathbf{H}_{k+1}^a) \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^a)' + \mathbf{R}_{k+1}$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{ab} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^a)'$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{ab} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{a}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{a}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot \left([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} \right)$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) A integração das equações diferenciais em (1a) é realizada mediante o uso do método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = T$, onde T é o período de amostragem das medidas vetoriais.

^(b) $\mathbf{H}_{k+1}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^a \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^a \end{bmatrix}$; $\mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$

EUKF

Utilizando o CD-UKF – revisado no capítulo 2 – tendo-se em vista a equação de estado (3.26) e a equação de medidas (3.21), obtém-se o estimador EUKF ⁸, o qual se propõe aqui como contribuição.

A Tabela 3.5 apresenta o EUKF.

⁸ EUKF – *Euler Unscented Kalman Filter*.

Tabela 3.5 Estimador de ângulos de Euler – EUKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{a}}_{0 0} = \hat{\mathbf{a}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = \mathbf{P}_0^a$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$[\hat{\mathbf{a}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}] = \text{IU}(\hat{\mathbf{a}}_{k k}, \mathbf{P}_{k k}, \mathbf{f}^a(\cdot, \hat{\boldsymbol{\omega}}_k), \mathbf{Q}^a(t))$
1b – Predição das medidas/ cov. cruzada ^(b)	$[\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b, \mathbf{P}_{k+1 k}^{ab}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{a}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}, \mathbf{h}_{k+1}^a(\cdot))$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b + \mathbf{R}_{k+1}$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{ab} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{a}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{a}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot ([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) As equações diferenciais (2.36) e (2.37) da IU são integradas utilizando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = T$, onde T é o período de amostragem das medidas vetoriais.

$$\sup(b) \quad \mathbf{h}_{k+1}^a(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1} \\ \mathbf{D}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$$

3.2.3 Estimação de DCM

O vetor de estado dos estimadores de DCM, DKF e DKFUO, é dado por $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9]'$. Seus componentes, os cossenos diretores, constituem a DCM \mathbf{D} que transforma vetores representados em S_R para S_B .

Substituindo o vetor de parâmetros \mathbf{p}_{k+1} em (3.1) por \mathbf{d}_{k+1} , obtém-se:

$$\mathbf{b}_{i,k+1} = \mathbf{D}(\mathbf{d}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1} \quad (3.30)$$

onde,

$$\mathbf{D}(\mathbf{d}_{k+1}) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 & d_9 \end{bmatrix}_{k+1} \quad (3.31)$$

A equação (3.30) pode ser reescrita de forma a se obter a equação de medidas linear e discreta no tempo dos estimadores de DCM:

$$\mathbf{b}_{i,k+1} = \mathbf{H}_{i,k+1} \cdot \mathbf{d}_{k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1} \quad (3.32)$$

onde,

$$\mathbf{H}_{i,k+1} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i,k+1}' & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{r}_{i,k+1}' & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{r}_{i,k+1}' \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

O modelo de cinemática de atitude para a DCM é dado pela seguinte equação diferencial matricial linear (Wertz, 1978):

$$\dot{\mathbf{D}}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \mathbf{D}(t) \quad (3.34)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}(t) = -[\boldsymbol{\omega}(t) \times]$. Essa equação pode ser reescrita na forma vetorial como:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{d}(t) \quad (3.35)$$

onde, para $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x(t) \ \omega_y(t) \ \omega_z(t)]'$,

$$\mathbf{W}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \omega_z(t) \cdot \mathbf{I}_3 & -\omega_y(t) \cdot \mathbf{I}_3 \\ -\omega_z(t) \cdot \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \omega_x(t) \cdot \mathbf{I}_3 \\ \omega_y(t) \cdot \mathbf{I}_3 & -\omega_x(t) \cdot \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Integrando (3.35) de t_k a t_{k+1} , obtém-se:

$$\mathbf{d}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \cdot \mathbf{d}_k \quad (3.37)$$

onde $\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k)$ é a matriz de transição de estado. Considerando que $\boldsymbol{\omega}(t)$ seja constante durante T , então essa matriz é dada por:

$$\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k) = e^{\mathbf{W}_k \cdot T} \quad (3.38)$$

onde \mathbf{W}_k é computada por (3.36), mas utilizando $\boldsymbol{\omega}_k$ em vez de $\boldsymbol{\omega}(t)$. Substituindo (3.3) em (3.38),

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{(\widehat{\mathbf{W}}_k + \delta \mathbf{W}_k) \cdot T} = e^{\widehat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot e^{\delta \mathbf{W}_k \cdot T} \quad (3.39)$$

onde as matrizes $\widehat{\mathbf{W}}_k$ e $\delta \mathbf{W}_k$ são dadas por (3.36), mas substituindo $\boldsymbol{\omega}(t)$ por $\widehat{\boldsymbol{\omega}}_k$ e $\delta \boldsymbol{\omega}_k$, respectivamente. Representando o segundo fator do lado direito de (3.39) pela correspondente série de potências, obtém-se:

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{\widehat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot (\mathbf{I}_9 + \delta \mathbf{W}_k \cdot T + \dots) \quad (3.40)$$

Considerando-se que $\delta \boldsymbol{\omega}_k$ e T sejam ambos pequenos, o truncamento da série em (3.40) após termos de primeira ordem permite que (3.37) seja aproximada pela equação:

$$\mathbf{d}_{k+1} \approx e^{\widehat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot \mathbf{d}_k + e^{\widehat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot \delta \mathbf{W}_k \cdot T \cdot \mathbf{d}_k \quad (3.41)$$

que pode ser reescrita de forma a se obter a *equação de estado* discreta no tempo dos estimadores de DCM:

$$\mathbf{d}_{k+1} = e^{\widehat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot \mathbf{d}_k + T \cdot e^{\widehat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot \boldsymbol{\Xi}_k \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_k \quad (3.42)$$

onde,

$$\boldsymbol{\Xi}_k \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -d_7 & d_4 \\ 0 & -d_8 & d_5 \\ 0 & -d_9 & d_6 \\ d_7 & 0 & -d_1 \\ d_8 & 0 & -d_2 \\ d_9 & 0 & -d_3 \\ -d_4 & d_1 & 0 \\ -d_5 & d_2 & 0 \\ -d_6 & d_3 & 0 \end{bmatrix}_k \quad (3.43)$$

Novamente, nota-se que o termo de ruído do modelo em (3.42) depende do valor do estado verdadeiro \mathbf{d}_k . Sendo assim, para fins de implementação dos estimadores de DCM,

aproxima-se a covariância \mathbf{Q}_k^d do ruído de estado empregando-se $\hat{\mathbf{d}}_{k|k}$ em lugar do \mathbf{d}_k . Sendo assim:

$$\mathbf{Q}_k^d \cong \mathbf{\Gamma}_k \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}_k' \quad (3.44)$$

onde,

$$\mathbf{\Gamma}_k = T \cdot e^{\hat{\mathbf{W}}_k \cdot T} \cdot \hat{\mathbf{\Xi}}_k \quad (3.45)$$

e $\hat{\mathbf{\Xi}}_k$ é computada por (3.43), porém utilizando $\hat{\mathbf{d}}_{k|k}$ ao invés de \mathbf{d}_k .

A exponencial matricial que define a matriz de transição em (3.38) será aqui aproximada por:

$$e^{\mathbf{W}_k \cdot T} = \mathbf{I}_9 + \mathbf{W}_k \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{W}_k^2 \cdot T^2 \quad (3.46)$$

O simples uso do KF tendo-se em vista as equações de estado (3.42) e de medidas (3.32), resulta num filtro cujas estimativas não obedecem à restrição de ortonormalidade, i.e., $\mathbf{D}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k})' \cdot \mathbf{D}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k}) = \mathbf{I}_3$. Bar-Itzhack e Reiner (1987) propuseram forçar essa restrição através de uma operação de ortogonalização realizada sobre as estimativas atualizadas. Essa operação se baseia no algoritmo iterativo (Bar-Itzhack e Meyer, 1976):

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{D}$$

para $j = 1$ até n , *faça*

$$\mathbf{X}_{j+1} = 1,5 \cdot \mathbf{X}_j - 0,5 \cdot \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_j' \cdot \mathbf{X}_j$$

fim para

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{X}_{j+1}$$

que, para $n \rightarrow \infty$, produz a matriz ortonormal, \mathbf{D}^* , que melhor se aproxima de \mathbf{D} no sentido Euclidiano ⁹. A aplicação de uma única iteração desse algoritmo à estimativa atualizada, $\mathbf{D}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k})$, conforme mostrado em Bar-Itzhack e Reiner (1984), corresponde à seguinte transformação,

$$\hat{\mathbf{d}}_{k|k}^* = \mathbf{M}_k \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k|k} \quad (3.47)$$

onde $\hat{\mathbf{d}}_{k|k}^*$ é a estimativa ortonormalizada no instante t_k e,

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} N_{11} \cdot \mathbf{I}_3 & N_{12} \cdot \mathbf{I}_3 & N_{13} \cdot \mathbf{I}_3 \\ N_{21} \cdot \mathbf{I}_3 & N_{22} \cdot \mathbf{I}_3 & N_{23} \cdot \mathbf{I}_3 \\ N_{31} \cdot \mathbf{I}_3 & N_{32} \cdot \mathbf{I}_3 & N_{33} \cdot \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}_k \quad (3.48)$$

onde os N_{ij} 's são os elementos da matriz:

$$\mathbf{N}_k = 1,5 \cdot \mathbf{I}_3 - 0,5 \cdot \mathbf{D}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k}) \cdot \mathbf{D}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k})' \quad (3.49)$$

O uso da operação de ortonormalização dada por (3.47) produz uma estimativa com erro $\tilde{\mathbf{d}}_{k|k}^* = \mathbf{d}_k - \hat{\mathbf{d}}_{k|k}^*$, cuja covariância, $\mathbf{P}_{k|k}^*$, deve ser computada ao longo da estimação. Os estimadores DKF e DKFUO aproximam $\mathbf{P}_{k|k}^*$ de formas distintas.

DKF (Bar-Itzhack e Reiner, 1984)

Mediante uso do KF e tendo-se em vista as equações de estado (3.42) e de medidas (3.32), obtêm-se os estágios de propagação e de atualização do DKF ¹⁰. Esse estimador emprega a ortogonalização dada por (3.47) e aproxima a covariância da estimativa ortogonalizada por:

⁹ A norma Euclidiana de uma matriz \mathbf{D} $n \times n$ é dada por $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$, onde $\lambda_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os auto-valores de $\mathbf{D}'\mathbf{D}$.

¹⁰ DKF – DCM Kalman Filter.

$$\mathbf{P}_{k|k}^* = \mathbf{P}_{k|k} + (\mathbf{I}_9 - \mathbf{M}_k) \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k|k} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k|k}' \cdot (\mathbf{I}_9 - \mathbf{M}_k)' \quad (3.50)$$

onde $\mathbf{P}_{k|k}$ é a covariância da estimativa atualizada. A Tabela 3.6 apresenta o DKF.

Tabela 3.6 Estimador de DCM – DKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{d}}_{0 0}^* = \hat{\mathbf{d}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0}^* = \mathbf{P}_0^d$
1a - Propagação do estado estimado	$\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k} = e^{\hat{\mathbf{W}}_{k,T}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = (e^{\hat{\mathbf{W}}_{k,T}}) \cdot \mathbf{P}_{k k} \cdot (e^{\hat{\mathbf{W}}_{k,T}})' + \mathbf{Q}_k^d$
1b – Predição das medidas ^(a)	$\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} = \mathbf{H}_{k+1}^d \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = (\mathbf{H}_{k+1}^d) \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^d)' + \mathbf{R}_{k+1}$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{db} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^d)'$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{db} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot ([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Ortogonalização	$\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1}^* = \mathbf{M}_{k+1} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1}$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1}^* = \mathbf{P}_{k+1 k+1} + (\mathbf{I}_9 - \mathbf{M}_{k+1}) \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1}' \cdot (\mathbf{I}_9 - \mathbf{M}_{k+1})'$
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

$$^{(a)} \quad \mathbf{H}_{k+1}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^d \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$$

DKFUO

A título de contribuição, propõe-se o DKFUO ¹¹, que se distingue do DKF na forma como aplica a ortogonalização dada por (3.47). Considerando-se que a estimativa atualizada seja um vetor Gaussiano, $\hat{\mathbf{d}} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$, então a média, $\hat{\mathbf{d}}_{k|k}^*$, e a covariância, $\mathbf{P}_{k|k}^*$, do vetor aleatório, $\hat{\mathbf{d}}^*$, obtido pela transformação de $\hat{\mathbf{d}}$ através de (3.47) podem ser aproximadas pela TU:

$$[\hat{\mathbf{d}}_{k|k}^*, \mathbf{P}_{k|k}^*] = \text{TU}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}, \mathbf{g}(\cdot)) \quad (3.51)$$

¹¹ DKFUO – DCM Kalman Filter with Unscented Orthogonalization.

onde $\mathbf{g}(\mathbf{d}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}$ e \mathbf{M} depende de \mathbf{d} conforme explicitado em (3.48) e (3.49). O uso da TU em (3.51) na ortonormalização das estimativas consiste numa contribuição original deste trabalho.

Como a estimativa $\hat{\mathbf{d}}_{k|k}^*$ computada pela TU em (3.51) é uma aproximação de $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{d}}_{k|k})$ [vide seção 2.3], espera-se que o DKFUO produza estimativas mais distantes da ortonormalidade, no sentido Euclidiano, que o DKF.

A Tabela 3.7 apresenta o DKFUO.

Tabela 3.7 Estimador de DCM – DKFUO.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{d}}_{0 0}^* = \hat{\mathbf{d}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0}^* = \mathbf{P}_0^d$
1a - Propagação do estado estimado	$\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k} = e^{\hat{\mathbf{W}}_{k,T}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k k}^*$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = (e^{\hat{\mathbf{W}}_{k,T}}) \cdot \mathbf{P}_{k k}^* \cdot (e^{\hat{\mathbf{W}}_{k,T}})' + \mathbf{Q}_k^d$
1b – Predição das medidas ^(a)	$\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} = \mathbf{H}_{k+1}^d \cdot \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = (\mathbf{H}_{k+1}^d) \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^d)' + \mathbf{R}_{k+1}$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{db} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^d)'$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{db} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{d}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot ([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Ortogonalização	$[\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1}^*, \mathbf{P}_{k+1 k+1}^*] = \text{TU}(\hat{\mathbf{d}}_{k+1 k+1}, \mathbf{P}_{k+1 k+1}, \mathbf{g}(\cdot))$
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

$$^{(a)} \quad \mathbf{H}_{k+1}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^d \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$$

3.2.4 Abordagem multiplicativa usando quatérnio de rotação e MRP

Como comentado anteriormente, uma das formas de se obter um estimador de quatérnio cujas estimativas tenham normas unitárias consiste no uso da abordagem multiplicativa (Lefferts *et al.*, 1982). Nessa, o quatérnio tem a função de representar a atitude

O vetor de estado do estimador de erro (representado em cinza na Figura 3.2) é dado por $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]'$, cujos componentes são os MRP. Substituindo o vetor de parâmetros \mathbf{p}_{k+1} em (3.1) por \mathbf{m}_{k+1} , obtém-se a *equação de medidas* não-linear e discreta no tempo:

$$\mathbf{b}_{i,k+1} = \mathbf{D}(\mathbf{m}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1} \quad (3.52)$$

onde (Schaub, 1998),

$$\mathbf{D}(\mathbf{m}_{k+1}) = \mathbf{I}_3 + \{8 \cdot [\mathbf{m}_{k+1} \times]^2 - 4 \cdot (1 - m_{k+1}^2) \cdot [\mathbf{m}_{k+1} \times]\} / (1 + m_{k+1}^2)^2 \quad (3.53)$$

$$e \ m_{k+1} = \|\mathbf{m}_{k+1}\|.$$

O modelo de cinemática de atitude para os MRP é dado pela seguinte equação diferencial não-linear (Schaub, 1998):

$$\dot{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{f}^m(\mathbf{m}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) \quad (3.54)$$

onde,

$$\mathbf{f}^m(\mathbf{m}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{G}^m(\mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.55)$$

e,

$$\mathbf{G}^m(\mathbf{m}) = \frac{1}{4} \{ (1 - m_{k+1}^2) \cdot \mathbf{I}_3 + 2 \cdot [\mathbf{m}_{k+1} \times] + 2 \cdot \mathbf{m}_{k+1} \cdot \mathbf{m}_{k+1}' \} \quad (3.56)$$

Substituindo a velocidade angular modelada por (3.3) em (3.54), obtém-se a *equação de estado* contínua no tempo:

$$\dot{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{f}^m(\mathbf{m}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)) + \mathbf{G}^m(\mathbf{m}(t)) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}(t) \quad (3.57)$$

Considerando que $\{\mathbf{m}(t)\}$ e $\{\delta \boldsymbol{\omega}(t)\}$ sejam estatisticamente independentes, então a média de $\{\mathbf{G}^m(\mathbf{m}(t)) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}(t)\}$ é nula. Sua auto-covariância, $E \left[\left(\mathbf{G}^m(\mathbf{m}(t + \tau)) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}(t + \tau) \right) \left(\mathbf{G}^m(\mathbf{m}(t)) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}(t) \right)' \right]$

$\tau)$. $\left(\mathbf{G}^m(\mathbf{m}(t)).\delta\boldsymbol{\omega}(t)\right)'] = \mathbf{Q}^m(t).\delta(\tau)$, tem valor dependente do estado verdadeiro desconhecido. Nesse caso, para fins de implementação dos estimadores de MRP, adota-se a seguinte aproximação:

$$\mathbf{Q}^m(t) \cong \boldsymbol{\Gamma}(t). \mathbf{Q}. \boldsymbol{\Gamma}(t)' \quad (3.58)$$

onde $\boldsymbol{\Gamma}(t) = \mathbf{G}^m(\hat{\mathbf{m}}_{k|k})$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$.

Em seguida são apresentados os estimadores MEKF e MUKF.

MEKF (Crassidis e Markley, 1996)

Utilizando o CD-EKF – revisado no capítulo 2 – tendo-se em vista a equação de estado (3.57) e a equação de medidas (3.52), obtém-se o estimador de MRP (bloco cinza da Figura 3.2) do MEKF ¹⁴. O quatérnio de referência utilizado para representar de forma não-singular a atitude global é propagado entre os instantes t_k e t_{k+1} através do modelo linear dado anteriormente em (3.15). Sendo assim, o bloco de *propagação do erro* computa apenas a covariância $\mathbf{P}_{k+1|k}^m$ e considera $\hat{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{0}$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$, pois a informação de atitude já está sendo propagada através do quatérnio. O erro atualizado produzido pelo estimador de MRP deve ser convertido no correspondente quatérnio de rotação, $\delta\mathbf{q}(\hat{\mathbf{m}}_{k+1|k+1})$. A relação entre essas duas representações é dada pelo seguinte quatérnio unitário (Schaub, 1998):

$$\mathbf{q}(\mathbf{m}) = \left[\frac{(1-m^2)}{(1+m^2)} \quad \frac{2.m_1}{(1+m^2)} \quad \frac{2.m_2}{(1+m^2)} \quad \frac{2.m_3}{(1+m^2)} \right]' \quad (3.59)$$

onde $m = \|\mathbf{m}\|$.

¹⁴ MEKF – *Multiplicative Extended Kalman Filter*.

Conforme ilustrado na Figura 3.2, o bloco de *reset* do quatérnio de referência requer uma multiplicação de quatérnios. A operação de multiplicação entre os quatérnios $\mathbf{q}_a = [q_{1a} \ \mathbf{e}_a']'$ e $\mathbf{q}_b = [q_{1b} \ \mathbf{e}_b']'$ é dada por:

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = [(q_{1a} \cdot q_{1b} - \mathbf{e}_a' \cdot \mathbf{e}_b) \quad (q_{1a} \cdot \mathbf{e}_b + q_{1b} \cdot \mathbf{e}_a - [\mathbf{e}_a \times] \cdot \mathbf{e}_b)]' \quad (3.60)$$

O MEKF requer as matrizes Jacobianas do estado e das medidas, derivadas de forma explícita no Apêndice B e representadas aqui, respectivamente, por:

$$\mathbf{F}^m(\hat{\mathbf{m}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^m(\mathbf{m}, \hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\hat{\mathbf{m}}(t)} \quad (3.61)$$

e

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^m = \left. \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1}}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{0}} \quad (3.62)$$

A Tabela 3.8 apresenta o MEKF.

Tabela 3.8 Estimador EKF multiplicativo – MEKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{m}}_{0 0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{P}_{0 0}^m = \mathbf{P}_0^m$ $\hat{\mathbf{q}}_{0 0} = \hat{\mathbf{q}}_0$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$\hat{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{0}, t \in [t_k, t_{k+1}).$ $\dot{\mathbf{P}}^m(t) = \mathbf{F}^m(\hat{\mathbf{m}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}_k). \mathbf{P}^m(t) + \mathbf{P}^m(t). \mathbf{F}^m(\hat{\mathbf{m}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}_k)' + \mathbf{Q}^m(t)$ $\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k} = e^{\hat{\boldsymbol{\omega}}_k T}. \hat{\mathbf{q}}_{k k} \quad (\text{Vide (3.15)})$
1b – Predição das medidas ^(b)	$\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} = [(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{0}). \mathbf{r}_{1,k+1})' \quad (\mathbf{D}(\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{0}). \mathbf{r}_{2,k+1})']'$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = (\mathbf{H}_{k+1}^m). \mathbf{P}_{k+1 k}. (\mathbf{H}_{k+1}^m)' + \mathbf{R}_{k+1}$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{mb} = \mathbf{P}_{k+1 k}. (\mathbf{H}_{k+1}^m)'$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{mb}. (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k+1} = \mathbf{K}_{k+1}. ([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1}^m = \mathbf{P}_{k+1 k}^m - \mathbf{K}_{k+1}. \mathbf{P}_{k+1 k}^b. (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – Reset do quatérnio ^(c)	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1} = \delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k+1}) \otimes \hat{\mathbf{q}}_{k+1 k}$
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) A integração das equações diferenciais em (1a) é realizada mediante o uso do método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = T$, onde T é o período de amostragem das medidas vetoriais.

^(b) $\mathbf{H}_{k+1}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^m \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^m \end{bmatrix}$; $\mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$

^(c) Para o cálculo de $\delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{m}}_{k+1|k+1})$, utiliza-se (3.59).

O CD-EKF originalmente propaga a estimativa do estado através da integração *simultânea* das equações diferenciais da média e da covariância [vide equações (2.22) e (2.23)]. No entanto, o MEKF considera que $\hat{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{0}$ durante a propagação da covariância, \mathbf{P}^m . A boa aproximação conseguida com essa modificação *ad hoc* se explica pelo fato de $\mathbf{m}(t)$ representar o erro de atitude \mathbf{e} , sendo assim, sua magnitude é pequena.

MUKF

Como contribuição, propõe-se aqui o método MUKF ¹⁵, que estima o erro parametrizado por MRP mediante o uso do CD-UKF. Evita-se a consideração de que $\hat{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{0}$ durante a propagação de \mathbf{P}^m . Nesse caso, a informação de atitude é propagada através do

¹⁵ MUKF – *Multiplicative Unscented Kalman Filter*.

erro, dispensando-se o uso da propagação do quatérnio de rotação. O MUKF apresenta a estrutura ilustrada na Figura 3.3.

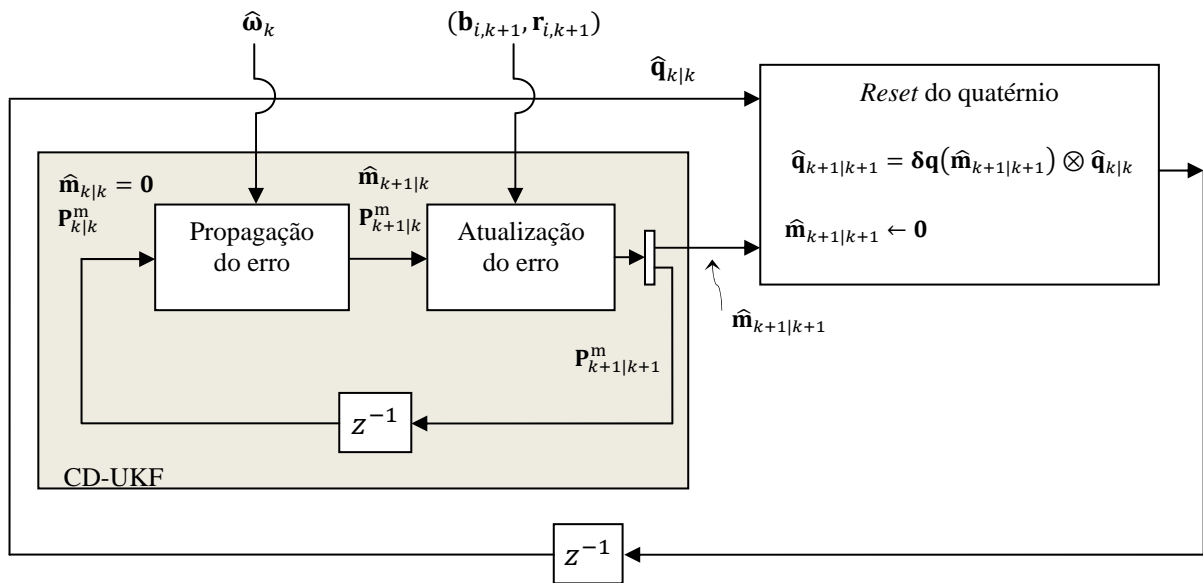


Figura 3.3 Estrutura do estimador MUKF.

Logo, tendo-se em vista a equação de estado em (3.57), a equação de medidas em (3.52) e a estrutura ilustrada na Figura 3.3, a Tabela 3.9 apresenta o estimador MUKF.

Tabela 3.9 Estimador UKF multiplicativo – MUKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{i,k} \quad i = 1,2.$ (Consideradas conhecidas. Vide (3.1)) \mathbf{Q} (Considerada conhecida. Vide (3.3))
Inicialização	$\hat{\mathbf{m}}_{0 0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{P}_{0 0}^m = \mathbf{P}_0^m$ $\hat{\mathbf{q}}_{0 0} = \hat{\mathbf{q}}_0$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$[\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}^m] = \text{IU}(\hat{\mathbf{m}}_{k k}, \mathbf{P}_{k k}^m, \mathbf{f}^m(\cdot, \hat{\boldsymbol{\omega}}_k), \mathbf{Q}^m(t))$
1b - Predição das medidas/ cov. cruzada ^(b)	$[\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b, \mathbf{P}_{k+1 k}^{mb}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}^m, \mathbf{h}_{k+1}^m(\cdot))$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^b = \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b + \mathbf{R}_{k+1}$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{mb} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{m}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot ([\mathbf{b}_{1,k+1}' \quad \mathbf{b}_{2,k+1}']' - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1}^m = \mathbf{P}_{k+1 k}^m - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$
3 – <i>Reset</i> do quatérnio ^(c)	$\hat{\mathbf{q}}_{k+1 k+1} = \delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k+1}) \otimes \hat{\mathbf{q}}_{k k}$ $\hat{\mathbf{m}}_{k+1 k+1} = \mathbf{0}$
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) As equações diferenciais (2.36) e (2.37) da IU são integradas utilizando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = T$, onde T é o período de amostragem das medidas vetoriais.

^(b) $\mathbf{h}_{k+1}^m(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1} \\ \mathbf{D}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1} \end{bmatrix}$; $\mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k+1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k+1} \end{bmatrix}$

^(c) Para o cálculo de $\delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{m}}_{k+1|k+1})$, utiliza-se (3.59).

3.3 Avaliação baseada em simulações

Com base em medidas simuladas, os estimadores apresentados na seção anterior são aqui comparados com relação a taxa de convergência, acurácia, robustez ao erro de inicialização e carga computacional. A partir dos resultados dessa avaliação aponta-se uma solução para o problema de estimação de atitude em 3 eixos do satélite ITASAT.

3.3.1 Simulação do movimento verdadeiro e das medidas

A avaliação realizada se baseia em testes usando dados simulados referentes ao movimento de um satélite rígido ao longo de uma órbita terrestre baixa e quase-equatorial durante o período de 1000 s iniciado às 12:00:00 (GMT) de 01/01/2008. Considera-se torque de controle nulo. O movimento verdadeiro, orbital e de atitude, e as medidas são simulados conforme descrito no Apêndice D. Desconsidera-se a ocorrência de eclipses. A Tabela 3.10 contém a atitude inicial (de S_B em relação a S_R) e a velocidade angular inicial (de S_B em relação a S_R e representada em S_B) do movimento simulado. Mediante tais condições iniciais, evita-se que a representação da atitude por ângulos de Euler (3 – 2 – 1) se torne singular durante a janela de tempo considerada.

Tabela 3.10 Parâmetros da simulação do movimento verdadeiro para avaliação dos estimadores de atitude.

Velocidade Angular Inicial	Quaténio Inicial ^(a)
$\boldsymbol{\omega}_0$	\mathbf{q}_0
$[5,0 \ 0,1 \ 5,0]' \text{ graus/s}$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]'$

^(a) O componente $q_{0,1}$ corresponde à parte real do quatérnio de rotação \mathbf{q}_0 . Em ângulos de Euler (3-2-1), a atitude inicial verdadeira é dada por $\boldsymbol{\alpha}_0 = [0 \ 0 \ 0]'$.

Os distúrbios nas medidas dos ângulos de azimute e de elevação do Sol, $[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]'$, no campo geomagnético, $\delta\mathbf{b}_{1,k}$, e na velocidade angular, $\delta\boldsymbol{\omega}_k$, são

considerados ruídos Gaussianos com médias nulas. Suas covariâncias são dadas na Tabela 3.11. As covariâncias dos erros de medição do campo geomagnético e da direção do Sol são escolhidas com base em valores típicos encontrados em Larson e Wertz (1999). A covariância do erro de medição de velocidade angular foi escolhida com valor suficiente para que não haja divergências das estimativas.

Tabela 3.11 Covariâncias verdadeiras dos ruídos de medidas para avaliação dos estimadores de atitude.

Medida	Covariância Verdadeira
Campo geomagnético	$\mathbf{R}_{1,k} = 4,0 \cdot 10^{-14} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (T)}^2$
Direção do Sol ^(a)	$\mathbf{R}_{\phi\theta} = \left(0,5 \frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot \mathbf{I}_2 \text{ rad}^2$
Velocidade angular	$\mathbf{Q} = (0,001)^2 \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (rad/s)}^2$

^(a) $\mathbf{R}_{\phi\theta}$ é a covariância do ruído de medidas, $\{[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]' \in \mathfrak{R}^2\}$, dos ângulos ilustrados na Figura D.3, no Apêndice D.

Conforme justificado no Apêndice D, o erro de medidas vetoriais da direção do Sol pode ser aproximado por:

$$\delta\mathbf{b}_{2,k} \cong \mathbf{\Pi}_k \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi_{s,k} \\ \delta\theta_{s,k} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

onde,

$$\mathbf{\Pi}_k \triangleq \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi_{s,k}) \cdot \text{cos}(\theta_{s,k}) & -\text{cos}(\phi_{s,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{s,k}) \\ -\text{sen}(\phi_{s,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{s,k}) & \text{cos}(\phi_{s,k}) \cdot \text{cos}(\theta_{s,k}) \\ \text{cos}(\phi_{s,k}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e $\phi_{s,k}$ e $\theta_{s,k}$ são as medidas dos ângulos de azimute e de elevação do Sol ilustrados na Figura D.3 do Apêndice D.

Como $\{[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]'\}$ tem média nula e covariância $\mathbf{R}_{\phi\theta}$, então a covariância $\mathbf{R}_{2,k}$ de $\{\delta\mathbf{b}_{2,k} \in \mathfrak{R}^3\}$ pode ser aproximada por $\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta} \cdot \mathbf{\Pi}_k' \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$. No entanto, como $\mathbf{R}_{\phi\theta}$ é uma matriz de ordem 2, o posto de $\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta} \cdot \mathbf{\Pi}_k'$ será no máximo 2 e, portanto, trata-se de uma matriz singular. De forma a contornar esse problema, soma-se termos de magnitude $\beta = 1 \times 10^{-6}$ aos elementos da diagonal principal de $\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta} \cdot \mathbf{\Pi}_k'$ (Mendel, 1995), obtendo-se:

$$\mathbf{R}_{2,k} \cong \mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta} \cdot \mathbf{\Pi}_k' + \beta \cdot \mathbf{I}_3 \quad (3.65)$$

3.3.2 Simulações de Monte Carlo

Utilizando-se as medidas sintetizadas conforme descrito acima, os estimadores de atitude são avaliados a partir de simulações de Monte Carlo com 100 realizações considerando-se diferentes magnitudes para o período de amostragem e para o erro de inicialização. Nessas simulações, o conhecimento *a priori* da atitude inicial do satélite é modelado, através da representação por ângulos de Euler (3 – 2 – 1) $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}_0, \mathbf{P}_0)$, onde $\boldsymbol{\alpha}_0$ tem como componentes os ângulos de Euler verdadeiros (conforme Tabela 3.10) e $\mathbf{P}_0 = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}_3$ é a covariância do erro de inicialização. Os estimadores de atitude são inicializados a partir de $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$, conforme mostrado na Tabela 3.12¹⁶. As covariâncias iniciais dos estimadores são sintonizadas. Como exposto no Apêndice D, o cálculo da representação do campo geomagnético em S_R requer estimativas da posição do satélite. Essa informação é modelada aqui como sendo a soma da posição verdadeira representada em S_R com um ruído Gaussiano de média nula e covariância $\mathbf{Q}_{pos} = 100 \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (km}^2\text{)}$ ¹⁷.

¹⁶ Na Tabela 3.12, as funções $a2q(\cdot)$, $a2d(\cdot)$ denotam, respectivamente, as conversões de ângulos de Euler (3-2-1) para quatérnio e de ângulos de Euler (3-2-1) para DCM (no formato de vetor). A função $a2d(\cdot)$ é dada por (3.22) enquanto que a função $a2q(\cdot)$ é obtida pela composição da conversão dada em (3.22) com a conversão de DCM para quatérnio. Essa última pode ser encontrada em Wertz (1978), pp. 413-414.

¹⁷ No ITASAT, pretende-se que a informação de posição seja obtida a partir da propagação de estimativas de órbita fornecidas por estação de rastreamento. A acurácia típica de estimativas de posição assim obtidas é de vários quilômetros (Larson e Wertz, 1999).

Tabela 3.12 Inicialização dos estimadores de atitude.

Estimador	Estado inicial	Covariância Inicial
QEKF/QUKF	$\hat{\mathbf{q}}_0 = a2q(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0)$	$\mathbf{P}_0^q = 1 \times 10^{-3} \cdot \mathbf{I}_4$
EEKF/EUKF	$\hat{\mathbf{a}}_0 = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_0$	$\mathbf{P}_0^a = 1 \times 10^{-2} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ rad}^2$
DKF/DKFUO	$\hat{\mathbf{d}}_0 = a2d(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0)$	$\mathbf{P}_0^d = 1 \times 10^{-4} \cdot \mathbf{I}_9$
MEKF/MUKF	$\hat{\mathbf{q}}_0 = a2q(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0)$ $\hat{\mathbf{m}}_{0 0} = [0 \ 0 \ 0]'$	$\mathbf{P}_0^m = 1 \times 10^{-3} \cdot \mathbf{I}_3$

Os parâmetros κ das TUs e IUs dos estimadores propostos (QUKF, EUKF, DKFUO e MUKF) são ajustados de acordo com a regra $\kappa = 3 - n$, onde n é a dimensão do vetor de estado [para detalhes sobre a TU e a IU, vide seção 2.3].

Os índices de desempenho utilizados na avaliação dos estimadores de atitude são:

- *Erro angular:*

$$I_k = \left| \cos \left(\frac{1}{2} \text{traço} \left(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}}_{k|k})' \cdot \mathbf{D}(\mathbf{p}_k) \right) - \frac{1}{2} \right) \right| \quad (3.66)$$

- *Índice de ortonormalidade:*

$$J_k = \text{traço} \left\{ \left(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}}_{k|k})' \cdot \mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}}_{k|k}) - \mathbf{I}_3 \right) \cdot \left(\mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}}_{k|k})' \cdot \mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}}_{k|k}) - \mathbf{I}_3 \right)' \right\} \quad (3.67)$$

Ambos os índices apresentam valores positivos. O índice I_k corresponde ao ângulo da representação de atitude por eixo/ângulo de Euler (Wertz, 1978). Seu valor se aproxima de zero à medida que a atitude estimada se aproxima da atitude verdadeira. Quanto ao índice J_k , seu valor se aproxima de zero à medida que a DCM correspondente ao vetor de parâmetros estimado, $\mathbf{D}(\hat{\mathbf{p}}_{k|k})$, se aproxima de uma matriz ortonormal.

Utilizando período de amostragem $T = 0,1 \text{ s}$ e inicializações com $\sigma_0 = 5,0 \text{ graus}$, obtêm-se para cada estimador 100 realizações dos índices I_k e J_k , das quais se computam as médias \bar{I}_k e \bar{J}_k e os desvios-padrão σ_k^I e σ_k^J , respectivamente. A Figura 3.4 apresenta os resultados de erro angular enquanto que a Figura 3.5 exhibe os resultados de ortonormalidade. Na Figura 3.4, nota-se uma ligeira superioridade dos estimadores de quatérnio em termos de tempo de convergência e acurácia, características que serão mais bem avaliadas adiante. As

oscilações observadas nos gráficos dessa figura são síncronas com a velocidade angular do satélite.

Na Figura 3.5, os índices de ortonormalidade referentes aos estimadores EEKF e EUKF são omitidos, pois as estimativas de ângulos de Euler quando convertidas para DCM sempre produzem uma matriz ortonormal [vide (3.22)] e, nesse caso, J_k assume valores nulos. Nota-se a superioridade em termos de ortonormalidade do QEKF e do DKF em relação ao QUKF e ao DKFUO, respectivamente, conforme previsto anteriormente [vide subseções 3.2.1 e 3.2.3]. A omissão da operação de normalização no QEKF resulta em índices de ortonormalidade com valores da ordem de 10^{-7} . Omitindo-se a operação de ortogonalização no DKF, obtêm-se estimativas que convergem lentamente e índices de ortonormalidade da ordem de 10^{-3} . Observa-se ainda que os índices de ortonormalidade associados aos estimadores multiplicativos, MEKF e MUKF, embora assumam valores diminutos, eles aumentam no decorrer da estimação, o que se deve a erros numéricos que fazem com que as normas das estimativas de quatérnio não se mantenham exatamente unitárias (Markley, 2003).

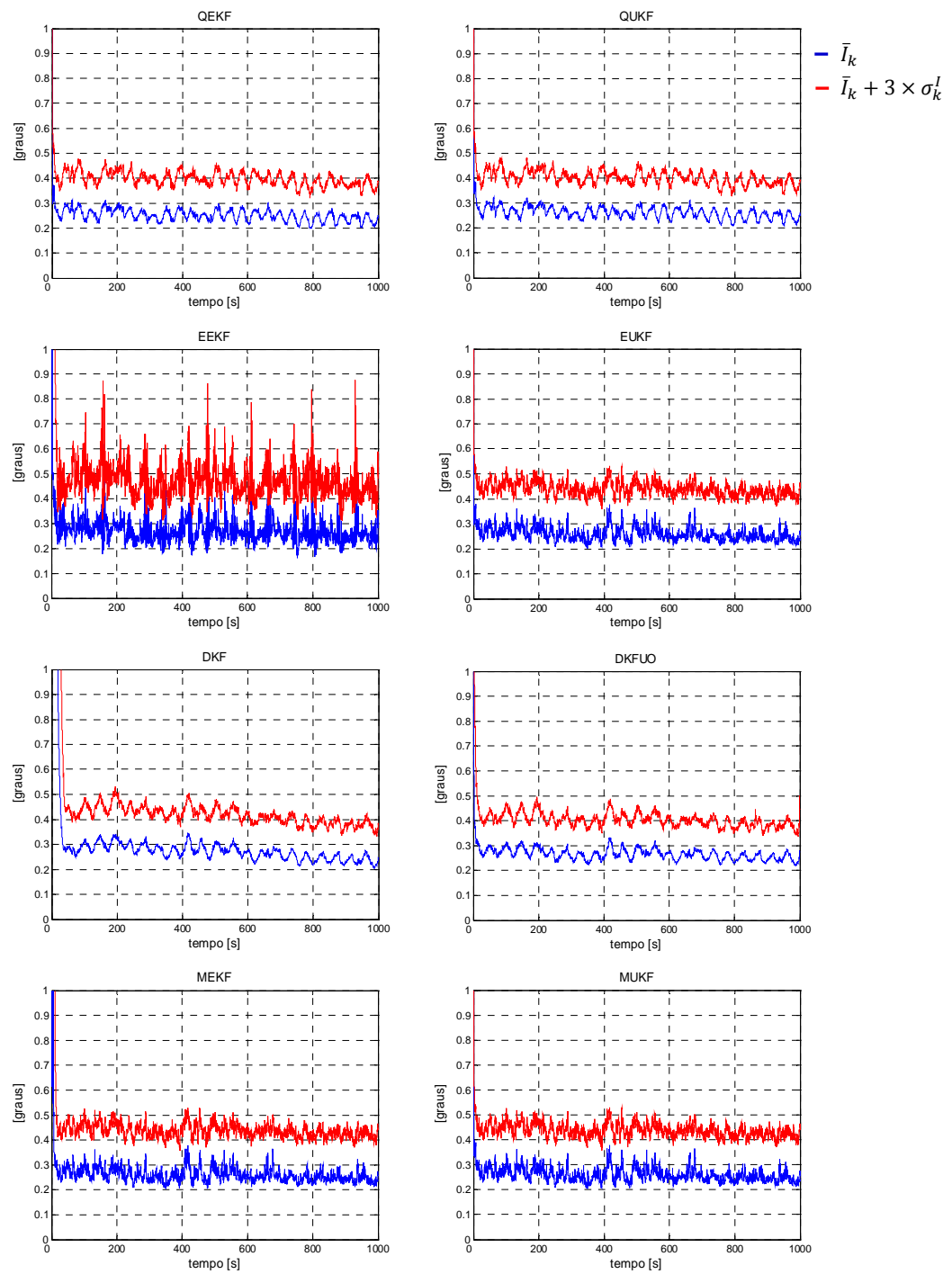


Figura 3.4 Erros angulares dos estimadores de atitude – $T = 0,1$ s, $\sigma_0 = 5,0$ graus.

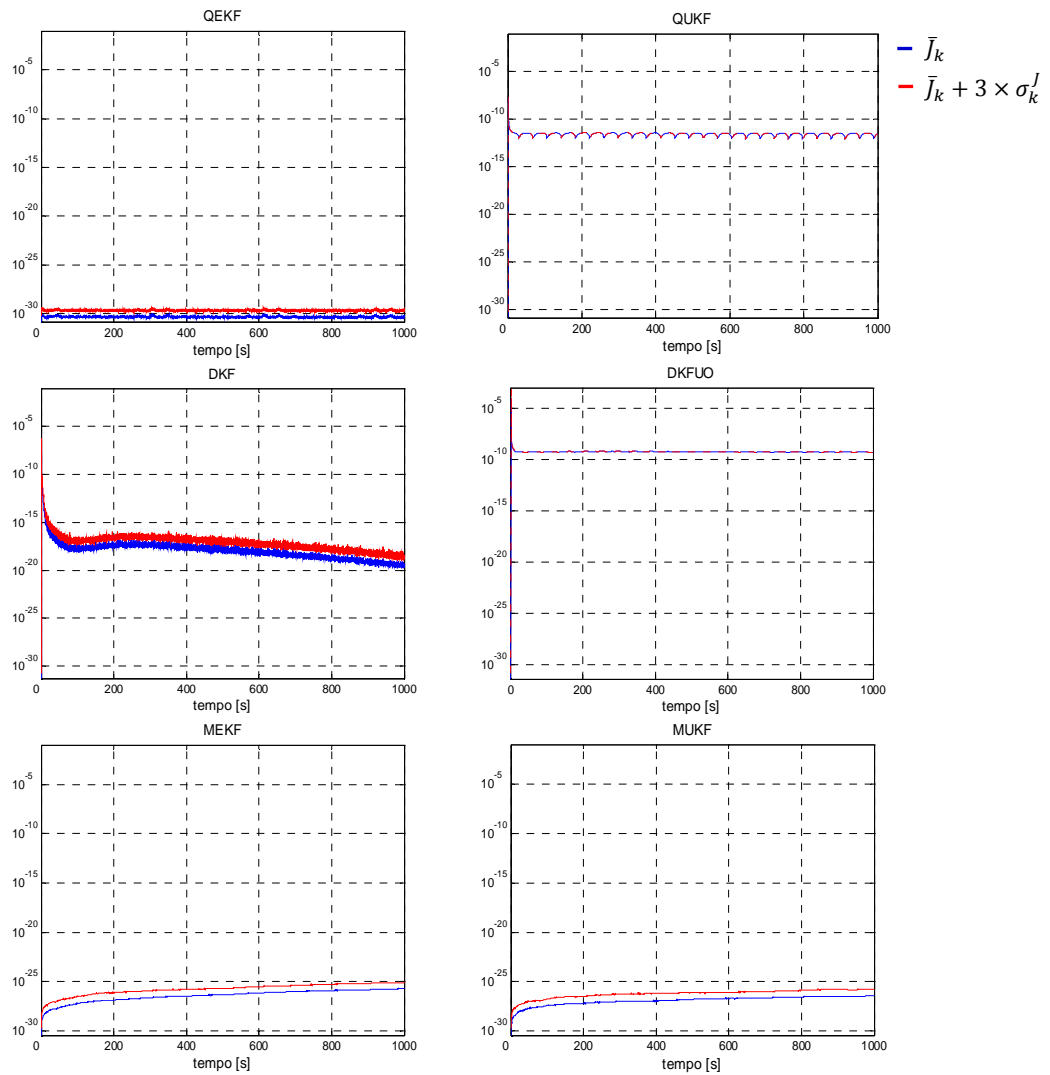


Figura 3.5 Índices de ortonormalidade dos estimadores de atitude – $T = 0,1$ s, $\sigma_0 = 5,0$ graus.

A Tabela 3.13 apresenta os tempos de convergência dos estimadores considerando-se diferentes magnitudes para o período de amostragem. Adota-se como medida do *tempo de convergência* o tempo decorrido desde o início da estimação até o instante t_k em que $\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I$ se torna inferior a 2 graus¹⁸. Observa-se que os estimadores de quatérnio convergem rapidamente e não apresentam diferença significativa entre si. Nota-se ainda a superioridade

¹⁸ Tipicamente, a estimação de atitude baseada em magnetômetro tem acurácia entre 0,5 grau e 3,0 graus (Larson e Wertz, 1999).

do EUKF, do DKFUO e do MUKF, respectivamente, em relação ao EEKF, ao DKF e ao MEKF.

Tabela 3.13 Tempos de convergência dos estimadores de atitude – $\sigma_0 = 5,0$ graus.

Estimador	Tempo de convergência [s] ($\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I < 2$ graus)		
	$T = 0,1$ s	$T = 0,5$ s	$T = 1,0$ s
QEKF/QUKF	0,2 / 0,2	1,0 / 1,0	2,0 / 2,0
EEKF/EUKF	6,4 / 0,2	16,0 / 1,0	29,0 / 2,0
DKF/DKFUO	21,3 / 1,4	14,0 / 6,5	18,0 / 12,0
MEKF/MUKF	7,4 / 0,2	8,5 / 1,5	24,0 / 2,0

A Tabela 3.14 apresenta os valores máximos de $\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I$ para $\forall t_k \in (50, 1000]$ s, através dos quais se comparam as acurácias dos estimadores considerando-se diferentes magnitudes para T . Como notado anteriormente na Figura 3.4, observa-se aqui a superioridade dos estimadores de quatérnio quando se adota $T = 0,1$ s. O EUKF e o DKFUO se mostram mais acurados que o EEKF e o DKF, respectivamente. Os estimadores multiplicativos, assim como os estimadores de quatérnio, não apresentam diferença significativa entre si.

Tabela 3.14 Acurácias dos estimadores de atitude – $\sigma_0 = 5,0$ graus.

Estimador	Máximo $\{\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I\}$, para $\forall t_k \in (50, 1000]$ s [graus]		
	$T = 0,1$ s	$T = 0,5$ s	$T = 1,0$ s
QEKF/QUKF	0,479 / 0,472	0,840 / 0,840	1,152 / 1,137
EEKF/EUKF	0,876 / 0,532	1,453 / 0,855	1,700 / 1,134
DKF/DKFUO	0,533 / 0,495	1,074 / 0,844	1,225 / 1,053
MEKF/MUKF	0,529 / 0,529	0,861 / 0,861	1,149 / 1,148

Os estimadores são avaliados em relação a robustez ao erro de inicialização conforme descrito a seguir. Em 1000 realizações do processo de estimação de cada estimador, registra-

se o número de vezes em que $\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^l > 2 \text{ graus}$ para $t_k \in (50, 1000] \text{ s}$. Esse número, denotado por $N_r(\sigma_0)$, é adotado na mensuração de robustez ao erro de inicialização do estimador em questão. Dessa forma, quanto menores os valores assumidos por $N_r(\sigma_0)$, maior é a robustez ao erro de inicialização do correspondente estimador. A Tabela 3.15 apresenta valores de $N_r(\sigma_0)$ considerando diferentes magnitudes para o desvio-padrão σ_0 . O período de amostragem é fixado em $T = 0,1 \text{ s}$. Observa-se que os estimadores de quatérnio se mostram mais robustos. Nota-se também a superioridade do EUKF, do DKFUO e do MUKF, respectivamente, em relação ao EEKF, ao DKF e ao MEKF.

Tabela 3.15 Robustez dos estimadores de atitude em relação ao erro de inicialização –

$$T = 0,1 \text{ s.}$$

Estimador	$N_r(\sigma_0)$		
	$\sigma_0 = 5,0 \text{ graus}$	$\sigma_0 = 20,0 \text{ graus}$	$\sigma_0 = 50,0 \text{ graus}$
QEKF/QUKF	0 / 0	0 / 0	0 / 0
EEKF/EUKF	3 / 0	8 / 0	14 / 0
DKF/DKFUO	0 / 0	0 / 0	107 / 82
MEKF/MUKF	0 / 0	4 / 0	18 / 0

3.3.3 Carga computacional

Considerando-se uma janela de tempo de 100 s e período de amostragem $T = 0,1 \text{ s}$, medem-se cinco realizações do tempo de execução de cada estimador, a partir das quais são calculadas a média, m_c , e o desvio-padrão, σ_c . A média m_c é utilizada aqui como medida de carga computacional¹⁹. A Tabela 3.16 apresenta as cargas computacionais dos estimadores de atitude. Os valores de σ_c mostram que as variações nas medidas de tempo de execução são pequenas. A terceira coluna contém as cargas computacionais relativas à carga do QEKF, que

¹⁹ A avaliação de carga computacional através de medidas de tempo de execução evita o trabalho de computar o número de operações de soma e de multiplicação como realizado em Waldmann (2002). Entretanto, o resultado é influenciado por outras tarefas concorrentes gerenciadas pelo sistema operacional empregado, no caso o Windows XP SP2.

apresenta o menor tempo de execução dentre os estimadores considerados. Os estimadores de DCM exibem maiores tempos de execução, o que se deve à dimensão 9 de seus vetores de estado. Nota-se que os estimadores propostos exibem cargas em torno do dobro das cargas dos correspondentes estimadores revisados.

Tabela 3.16 Cargas computacionais dos estimadores de atitude.

Estimador	Tempo de execução [s] $m_c (\sigma_c)$	Carga relativa ao QEKF
QEKF/QUKF	0,97 (0,02) / 1,98 (0,05)	1 / 2,0
EEKF/EUKF	1,25 (0,02) / 2,77 (0,05)	1,3 / 2,9
DKF/DKFUO	2,16 (0,06) / 3,76 (0,08)	2,2 / 3,9
MEKF/MUKF	1,35 (0,05) / 3,40 (0,03)	1,4 / 3,5

3.4 Comentários

Tratou-se aqui do problema de estimação de atitude de satélite em 3 eixos segundo a abordagem MV a partir de medidas vetoriais do campo geomagnético e da direção do Sol. Foram estudadas quatro formas de representação de atitude: quatérnio de rotação, ângulos de Euler, DCM e MRP. Para cada uma dessas representações, revisou-se um método existente na literatura e propôs-se outro, tendo em vista o uso da TU e/ou da IU.

Os estimadores foram avaliados com base em simulações de Monte Carlo. De forma geral, os estimadores propostos se mostraram melhores em termos de taxa de convergência, acurácia e robustez ao erro de inicialização. Por outro lado, tais estimadores exibiram maiores tempos de execução.

A comparação entre representações de atitude revelou que os estimadores de quatérnio, QEKF e QUKF, apresentam melhores desempenhos. Sendo assim, esses estimadores serão considerados na proposta de um Sistema de Determinação de Atitude (SDA) para satélites de baixo custo no capítulo 5.

4 ESTIMAÇÃO DE VELOCIDADE ANGULAR

Algorítmos para estimação de velocidade angular a partir de medidas vetoriais do campo geomagnético e da direção do Sol são investigados neste capítulo. Com base em equações de estado e de medidas existentes na literatura, apresentam-se dois estimadores do tipo DA-VM – DAEKF e DAUKF – e dois do tipo EA-VM – EAEKF e EAUKF.^{1,2}

A seção 4.1 define o problema de estimação de velocidade angular a partir de medidas vetoriais. Em seguida, a seção 4.2 apresenta as formulações dos estimadores. A seção 4.3 os compara através de resultados obtidos com medidas simuladas. Por fim, a seção 4.4 apresenta comentários sobre os estudos realizados no capítulo.

4.1 Definição do problema (Bar-Itzhack, 2001)

O problema de estimação de velocidade angular a partir de medidas vetoriais é definido a seguir. Seja S_B um sistema de coordenadas Cartesianas (SCC) fixo ao corpo do satélite e S_R algum SCC de referência. O sistema S_B gira, no instante t , com uma velocidade angular em relação a S_R representada em S_B por $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathfrak{R}^3$. Um conjunto de m vetores observado no instante t , quando projetado em S_B e S_R , dá origem aos conjuntos $\mathcal{B}(t) = \{\mathbf{b}_i(t) \in \mathfrak{R}^3, i = 1, 2, \dots, m\}$ e $\mathcal{R}(t) = \{\mathbf{r}_i(t) \in \mathfrak{R}^3, i = 1, 2, \dots, m\}$, respectivamente; m é o número de pares de *medidas vetoriais* $(\mathbf{b}_i(t), \mathbf{r}_i(t))$. Os elementos de $\mathcal{B}(t)$ e $\mathcal{R}(t)$ são as representações das medidas vetoriais em S_B e em S_R , respectivamente.

Os elementos de $\mathcal{B}(t)$ e $\mathcal{R}(t)$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ se relacionam através do teorema do transporte,

¹ A classificação de estimadores de velocidade angular adotada neste trabalho é apresentada no item 1.1.2.

² DAEKF – *Derivative Approach, Extended Kalman Filter*.
 DAUKF – *Derivative Approach, Unscented Kalman Filter*.
 EAEKF – *Estimation Approach, Extended Kalman Filter*.
 EAUKF – *Estimation Approach, Unscented Kalman Filter*.

$$\mathbf{D}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{b}}_i(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b}_i(t) \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{D}(t)$ é a DCM que rotaciona de S_R a S_B no instante t .

Considerando que $\boldsymbol{\omega}(t)$ tenha magnitude grande o suficiente para que as representações das medidas vetoriais em S_B tenham variações temporais significativamente maiores que as das medidas vetoriais em S_R , o vetor derivada temporal observado em S_R , $\dot{\mathbf{r}}_i(t)$, em (4.1) pode ser desprezado (Psiaki e Oshman, 2003). Nesse caso, essa equação simplifica-se para,

$$\dot{\mathbf{b}}_i(t) = [\mathbf{b}_i(t) \times] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \quad (4.2)$$

onde $[\mathbf{b}_i(t) \times]$ é a matriz *produto vetorial* referente ao vetor $\mathbf{b}_i(t)$ [vide notação na Lista de Símbolos]. Como no capítulo 3, $i = 1$ se refere às medidas do campo geomagnético, enquanto que $i = 2$ corresponde às medidas da direção do Sol. Essa equação consiste no *modelo de cinemática das medidas vetoriais* utilizado nas formulações dos estimadores na seção 4.2. *Nota-se sua independência em relação à atitude e às medidas vetoriais em S_R .*

Conforme definido em 1.2.2, estimadores de $\boldsymbol{\omega}(t)$ a partir de medidas vetoriais podem pertencer a duas abordagens distintas: abordagem baseada em derivação (DA-VM) e abordagem baseada em estimação (EA-VM). Estimadores pertencentes à abordagem DA-VM utilizam (4.2) na definição de suas *equações de medidas* e requerem a computação numérica de derivadas temporais das medidas vetoriais. Por outro lado, estimadores que seguem a abordagem EA-VM incluem (4.2) em suas *equações de estado* e evitam o cálculo de derivadas temporais das medidas.

Os estimadores de velocidade angular existentes na literatura normalmente têm suas equações de estado baseadas nas *equações de Euler*³, as quais requerem o conhecimento do

³ Uma exceção a essa abordagem é encontrada em Oshman e Markley (1999), onde se modela a aceleração angular do veículo como um processo estocástico Markoviano.

tensor de inércia do veículo bem como dos torques externos nele atuantes. Essa modelagem é utilizada neste trabalho. Dessa forma, considerando-se um satélite rígido e sem rodas de *momentum* ou de reação, a evolução temporal da velocidade angular é modelada por (Wertz, 1978),

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{J}^{-1} \cdot [(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}(t)) \times \boldsymbol{\omega}(t)] + \mathbf{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{J} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ é o tensor de inércia; $\boldsymbol{\tau}(t) \in \mathfrak{R}^3$ é o vetor torque de controle; e $\{\mathbf{w}(t) \in \mathfrak{R}^3\}$ é o ruído de estado que representa torques de perturbação não-modelados⁴, incertezas no tensor de inércia e incertezas no modelo do atuador utilizado para gerar $\boldsymbol{\tau}(t)$. Esse ruído é considerado aqui como um processo branco com média nula e densidade espectral de potência $\mathbf{Q}^d \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$.

4.2 Estimadores de velocidade angular

Em seguida são apresentados estimadores de velocidade angular pertencentes às abordagens DA-VM e EA-VM. Por simplicidade, os estimadores do tipo DA-VM serão chamados de *estimadores DA* enquanto que os do tipo EA-VM serão referidos como *estimadores EA*.

4.2.1 Abordagem baseada em derivação (Harman e Bar-Itzhack, 1999)

Os estimadores DA apresentados em seguida têm como vetor de estado a própria velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

Considerando-se que o período de amostragem T seja suficientemente pequeno, pode-se aproximar a derivada em (4.2) por diferença finita. Dessa forma, obtém-se a equação de medidas linear e discreta no tempo,

⁴ Os torques de perturbação mais relevantes são devidos a gradiente gravitacional, magnetismo residual, arrasto atmosférico e radiação solar. Modelos para esses torques podem ser encontrados em Wertz (1978), pp. 566-576.

$$\mathbf{z}_{i,k+1}^d = \mathbf{H}_{i,k+1}^d \cdot \boldsymbol{\omega}_{k+1} + \mathbf{v}_{i,k+1}^d \quad (4.4)$$

onde,

$$\mathbf{z}_{i,k+1}^d \triangleq \frac{1}{T} (\mathbf{b}_{i,k+1} - \mathbf{b}_{i,k}) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^d \triangleq [\mathbf{b}_{i,k+1} \times] \quad (4.6)$$

O termo de ruído, $\{\mathbf{v}_{i,k}^d \in \mathfrak{R}^3\}$, da equação de medidas (4.4) abarca erros decorrentes de 3 fontes. A primeira delas consiste na aproximação adotada em (4.2). A segunda se trata do erro da derivação numérica em (4.5), que tem significância dependente do intervalo T e das taxas de variação temporal das medidas vetoriais⁵. A terceira fonte consiste nos ruídos, $\{\delta \mathbf{b}_{i,k} \in \mathfrak{R}^3\}$, das medidas vetoriais utilizadas no cálculo de $\mathbf{z}_{i,k+1}^d$ mediante (4.5). Dessa forma, o ruído $\{\mathbf{v}_{i,k}^d \in \mathfrak{R}^3\}$ apresenta uma natureza complexa. No entanto, para facilitar o emprego da equação de medidas (4.4) em estimadores de estado dos tipos EKF e UKF, considera-se seu modelo como sendo simplesmente um ruído branco com média nula e covariância \mathbf{R}_i^d .

A Figura 4.1 apresenta a estrutura dos estimadores DA estudados aqui. As medidas vetoriais no instante t_{k+1} , $\mathbf{b}_{i,k+1}$, são adquiridas segundo um período de amostragem T . O estimador ilustrado produz no instante t_{k+1} a estimativa $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1|k+1}$ e a covariância do erro de estimação $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$.

⁵ Por exemplo, para um dado valor de T , o erro na derivação numérica das medidas vetoriais em S_B aumenta com a frequência no caso em que as medidas vetoriais varia senoidalmente.

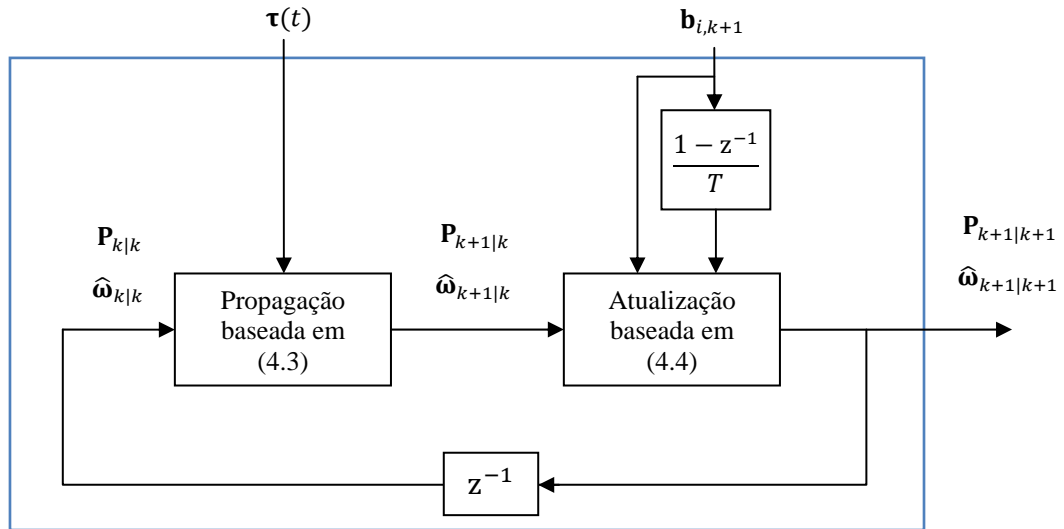


Figura 4.1 Estimador de velocidade angular – abordagem DA-VM.

As equações de estado (4.3) e de medidas (4.4) são utilizadas nos estimadores PSELIKA (*pseudo-linear Kalman filter*) e CD-SDARE (*continuous discrete, state-dependent algebraic Riccati equation*) propostos por Harman e Bar-Itzhack (1999). Esses estimadores se baseiam na estrutura pseudo-linear de (4.3) cujo termo não-linear, $\mathcal{J}^{-1} \cdot [(\mathcal{J} \cdot \omega(t)) \times \omega(t)]$, pode ser decomposto na multiplicação de uma matriz dependente do estado, $\mathcal{J}^{-1} \cdot [(\mathcal{J} \cdot \omega(t)) \times]$, pelo próprio estado, $\omega(t)$. Esses estimadores evitam o uso de linearização e, conseqüentemente, apresentam maior robustez a erros de inicialização quando comparados ao CD-EKF. Por outro lado, apresentam acurácia inferior à do CD-EKF (Psiaki e Oshman, 2003). Em diversas aplicações, o UKF tem se mostrado mais robusto a erros de inicialização do que o EKF (Julier e Uhlmann, 2004). Isso motiva a investigação do uso do CD-UKF na estimação de velocidade angular empregando as equações de estado (4.3) e de medidas (4.4).

Em seguida são apresentados os estimadores DAEKF e DAUKF.

DAEKF (Santos e Waldmann, 2007b)

Utilizando-se o CD-EKF – revisado no capítulo 2 – para estimar velocidade angular segundo a abordagem DA, obtém-se o estimador DAEKF apresentado na Tabela 4.1. As equações de estado e de medidas do DAEKF são dadas, respectivamente, por (4.3) e (4.4). Esse estimador requer a matriz Jacobiana do estado,

$$\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}(t))}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\boldsymbol{\omega}=\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)} \quad (4.7)$$

onde,

$$\mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{J}^{-1} \cdot (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (4.8)$$

A matriz $\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$ representada em (4.7) é dada de forma explícita no Apêndice B; o torque de controle $\boldsymbol{\tau}(t)$ é considerado constante entre instantes de amostragem sucessivos, ou seja, $\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}_k$ para $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$.

Tabela 4.1 Estimador de velocidade angular – DAEKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_i^d \quad i = 1,2.$ (Sintonizadas) \mathbf{Q}^d (Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{0 0} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = E[(\boldsymbol{\omega}_0 - \hat{\boldsymbol{\omega}}_0) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 - \hat{\boldsymbol{\omega}}_0)']$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{f}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}_k)$ $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}_k) \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}_k)' + \mathbf{Q}^d$
1b – Predição das medidas ^(b)	$\hat{\mathbf{z}}_{k+1 k} = \mathbf{H}_{k+1}^d \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^z = \mathbf{H}_{k+1}^d \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot \mathbf{H}_{k+1}^{d'} + \mathbf{R}^d$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{\omega z} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot \mathbf{H}_{k+1}^{d'}$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{\omega z} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^z)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa ^(c)	$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k+1} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1}^d - \hat{\mathbf{z}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^z \cdot \mathbf{K}_{k+1}'$
3 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) A propagação da média e da covariância é realizada integrando-se as equações diferenciais em (1a) de t_k a t_{k+1} a partir das condições iniciais $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k|k}$ e $\mathbf{P}_{k|k}$. Ao final da integração, obtém-se $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1|k}$ e $\mathbf{P}_{k+1|k}$; Para tal, utiliza-se o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = 0,1$ s.

$$\text{(b) } \mathbf{H}_{k+1}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^d \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^d \end{bmatrix}; \mathbf{R}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^d & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_2^d \end{bmatrix}$$

$$\text{(c) } \mathbf{z}_{k+1}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,k+1}^d \\ \mathbf{z}_{2,k+1}^d \end{bmatrix}$$

DAUKF (Santos e Waldmann, 2007b)

Utilizando-se o CD-UKF – conforme apresentado no capítulo 2 – para estimar velocidade angular segundo a abordagem DA, obtém-se o estimador DAUKF apresentado na Tabela 4.2. As equações de estado e de medidas do DAUKF são dadas, respectivamente, por (4.3) e (4.4). Observa-se que os cálculos das medidas previstas, da covariância dos resíduos (passo 1b) e da covariância cruzada entre o estado e as medidas (passo 1c) se baseiam numa equação de medidas linear, (4.4), o que dispensa o uso da TU.

Assim como no DAEKF, aqui o torque de controle $\boldsymbol{\tau}(t)$ também é considerado constante entre instantes de amostragem sucessivos.

Tabela 4.2 Estimador de velocidade angular – DAUKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_i^d \quad i = 1,2. \text{ (Sintonizadas)}$ $\mathbf{Q}^d \quad \text{(Sintonizada)}$
Inicialização	$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{0 0} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = E[(\boldsymbol{\omega}_0 - \hat{\boldsymbol{\omega}}_0) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 - \hat{\boldsymbol{\omega}}_0)']$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}] = \text{IU}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k k}, \mathbf{P}_{k k}, \mathbf{f}^d(\cdot, \boldsymbol{\tau}(t)), \mathbf{Q}^d)$
1b – Predição das medidas ^(b)	$\hat{\mathbf{z}}_{k+1 k} = \mathbf{H}_{k+1}^d \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^z = \mathbf{H}_{k+1}^d \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot \mathbf{H}_{k+1}^{d'} + \mathbf{R}^d$
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{\omega z} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot \mathbf{H}_{k+1}^{d'}$
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{\omega z} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^z)^{-1}$
2b – Atualização da estimativa ^(c)	$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k+1} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^z \cdot \mathbf{K}_{k+1}'$
3 – Voltar a (1) até fim da estimação.	

(a) As equações diferenciais (2.36) e (2.37) da IU são integradas utilizando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = 0,1$ s.

$$(b) \quad \mathbf{H}_{k+1}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^d \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^d & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_2^d \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,k+1}^d \\ \mathbf{z}_{2,k+1}^d \end{bmatrix}$$

4.2.2 Abordagem baseada em estimação (Bar-Itzhack, 2001)

O vetor de estado dos estimadores EA é dado por $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}' \quad \mathbf{b}_1' \quad \mathbf{b}_2']' \in \mathfrak{R}^9$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular de interesse e \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 correspondem, respectivamente, às representações do campo geomagnético e da direção do Sol no sistema S_B . Concatenando as equações de cinemática de \mathbf{b}_1 e de \mathbf{b}_2 dadas por (4.2) com o modelo dinâmico de um satélite rígido e sem rodas dado por (4.3), obtém-se a equação de estado dos estimadores EA,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^e(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) + \mathbf{w}^e(t) \quad (4.9)$$

onde o termo de ruído, $\{\mathbf{w}^e(t) \in \mathfrak{R}^9\}$, é modelado como um processo ruidoso branco de média nula e densidade espectral de potência $\mathbf{Q}^e \in \mathfrak{R}^{9 \times 9}$, $\mathbf{f}^d(\cdot, \cdot)$ vem de (4.8) e,

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \\ [\mathbf{b}_1(t) \times] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \\ [\mathbf{b}_2(t) \times] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Como as medidas utilizadas pelos estimadores EA correspondem a \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 , há uma relação linear e invariante no tempo entre elas e o vetor estado, donde se obtém a simples equação de medidas em tempo discreto,

$$\mathbf{z}_{k+1}^e = \mathbf{H}^e \cdot \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}^e \quad (4.11)$$

onde,

$$\mathbf{z}_{k+1}^e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,k+1} \\ \mathbf{b}_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{H}^e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{v}_{k+1}^e \triangleq \begin{bmatrix} \delta \mathbf{b}_{1,k+1} \\ \delta \mathbf{b}_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

O erro de medidas $\{\mathbf{v}_k^e \in \mathfrak{R}^6\}$ é modelado como uma seqüência branca de média nula e covariância,

$$\mathbf{R}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{R}_{1,k}$ e $\mathbf{R}_{2,k}$ são as covariâncias dos ruídos de medida vetorial $\{\delta \mathbf{b}_{1,k} \in \mathfrak{R}^3\}$ e $\{\delta \mathbf{b}_{2,k} \in \mathfrak{R}^3\}$, respectivamente. Essas covariâncias são consideradas conhecidas.

A Figura 4.2 apresenta a estrutura dos estimadores EA estudados aqui. As medidas vetoriais no instante t_{k+1} , $\mathbf{b}_{i,k+1}$, são adquiridas segundo um período de amostragem T . O estimador ilustrado produz no instante t_{k+1} a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ e a covariância do erro de

estimação $\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x$, donde se obtêm a estimativa de velocidade e a covariância do correspondente erro de estimação,

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1|k+1} = [\hat{x}_{1,k+1|k+1} \quad \hat{x}_{2,k+1|k+1} \quad \hat{x}_{3,k+1|k+1}]' \quad (4.16)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x = \begin{bmatrix} P_{11,k+1|k+1}^x & P_{12,k+1|k+1}^x & P_{13,k+1|k+1}^x \\ P_{21,k+1|k+1}^x & P_{22,k+1|k+1}^x & P_{23,k+1|k+1}^x \\ P_{31,k+1|k+1}^x & P_{32,k+1|k+1}^x & P_{33,k+1|k+1}^x \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Além das equações (4.9) e (4.11), Bar-Itzhack (2001) propõe equações de estado e de medidas para estimação de velocidade angular segundo a abordagem EA-AM, que ao invés de medidas vetoriais, utiliza atitude em 3 eixos como dado de entrada. Nesse caso, a equação de estado é obtida concatenando-se uma equação de cinemática de atitude ⁶ ao modelo dinâmico do satélite. A equação de medidas, de forma similar a (4.11), é linear e invariante no tempo. A modelagem apresentada aqui [(4.9) e (4.11)] tem a vantagem de permitir o projeto de estimadores de velocidade angular que não requerem o conhecimento da atitude do veículo.

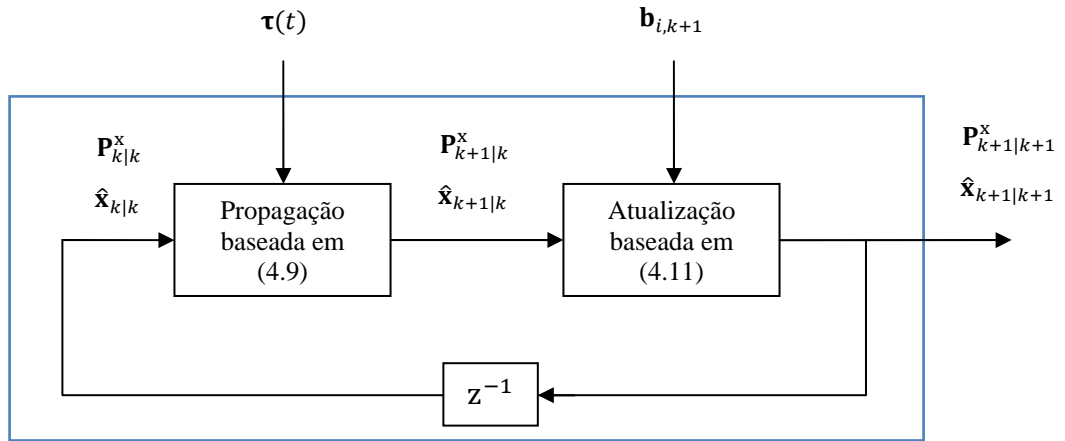


Figura 4.2 Estimador de velocidade angular – abordagem EA-VM.

Em seguida são apresentados os estimadores EAEKF e EAUKF.

⁶ Para maiores detalhes sobre cinemática de atitude, vide Shuster (1993); no capítulo 3, são apresentadas as equações de cinemática em 4 diferentes parametrizações: ângulos de Euler (3-2-1), quaternião de rotação, DCM e MRP.

EAEKF

Utilizando-se o CD-EKF para estimar velocidade angular segundo a abordagem EA-VM, obtém-se o estimador EAEKF apresentado na Tabela 4.3. As equações de estado e de medidas do EAEKF são dadas, respectivamente, por (4.9) e (4.11). Esse estimador requer a matriz Jacobiana do estado,

$$\mathbf{F}^e(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}(t))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{f}^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ é dada por (4.10).

A matriz $\mathbf{F}^e(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$ representada em (4.18) é dada de forma explícita no Apêndice B; o torque de controle $\boldsymbol{\tau}(t)$ é considerado constante entre instantes de amostragem sucessivos.

Tabela 4.3 Estimador de velocidade angular EAEKF.

Parâmetros	\mathbf{R}_k^e (Considerada conhecida. Vide (4.15)) \mathbf{Q}^e (Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = \hat{\mathbf{x}}_0$ $\mathbf{P}_{0 0}^x = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)']$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}^e(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}_k)$ $\dot{\mathbf{P}}^x(t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}_k) \cdot \mathbf{P}^x(t) + \mathbf{P}^x(t) \cdot \mathbf{F}^e(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}_k)' + \mathbf{Q}^e$
1b - Predição das medidas	$\hat{\mathbf{z}}_{k+1 k} = \mathbf{H}^e \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^z = \mathbf{H}^e \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^x \cdot \mathbf{H}^{e'} + \mathbf{R}_{k+1}^e$
1c - Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{xz} = \mathbf{P}_{k+1 k}^x \cdot \mathbf{H}^{e'}$
2a - Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{xz} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^z)^{-1}$
2b - Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1}^e - \hat{\mathbf{z}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1}^x = \mathbf{P}_{k+1 k}^x - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^z \cdot \mathbf{K}_{k+1}'$
3 - Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) A propagação da média e da covariância é realizada integrando-se as equações diferenciais em (1a) de t_k a t_{k+1} a partir das condições iniciais $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ e $\mathbf{P}_{k|k}^x$. Ao final da integração, obtém-se $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ e $\mathbf{P}_{k+1|k}^x$; Para tal, utiliza-se o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = 0,1$ s.

EAUKF

Utilizando-se o CD-UKF na estimação de velocidade angular segundo a abordagem EA-VM, obtém-se o estimador EAUKF apresentado na Tabela 4.4. As equações de estado e de medidas do EAUKF são dadas, respectivamente, por (4.9) e (4.11). Observa-se que os cálculos das medidas previstas, da covariância do resíduo (passo 1b) e da covariância cruzada entre o estado e as medidas (passo 1c) se baseiam numa equação de medidas linear, (4.11), o que dispensa o uso da TU.

Assim como no EAEKF, aqui o torque de controle $\boldsymbol{\tau}(t)$ também é considerado constante entre instantes de amostragem sucessivos.

Tabela 4.4 Estimador de velocidade angular EAUKF.

Parâmetros	\mathbf{R}_k^e (Considerada conhecida. Vide (4.15)) \mathbf{Q}^e (Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = \hat{\mathbf{x}}_0$ $\mathbf{P}_{0 0}^x = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)']$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$[\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}^x] = \text{IU}(\hat{\mathbf{x}}_{k k}, \mathbf{P}_{k k}^x, \mathbf{f}^e(\cdot, \boldsymbol{\tau}(t)), \mathbf{Q}^e)$
1b - Predição das medidas	$\hat{\mathbf{z}}_{k+1 k} = \mathbf{H}^e \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k}^z = \mathbf{H}^e \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^x \cdot \mathbf{H}^{e'} + \mathbf{R}_{k+1}^e$
1c - Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{xz} = \mathbf{P}_{k+1 k}^x \cdot \mathbf{H}^{e'}$
2a - Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{xz} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^z)^{-1}$
2b - Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{z}_{k+1}^e - \hat{\mathbf{z}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1}^x = \mathbf{P}_{k+1 k}^x - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^z \cdot \mathbf{K}_{k+1}'$
3 - Voltar a (1) até fim da estimação.	

^(a) As equações diferenciais (2.36) e (2.37) da IU são integradas utilizando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = 0,1$ s.

4.3 Avaliação baseada em simulações

Os estimadores DAEKF, DAUKF, EAEKF e EAUKF apresentados na seção anterior são em seguida comparados com respeito a taxa de convergência, acurácia, robustez ao erro de inicialização e carga computacional.

4.3.1 Simulação do movimento verdadeiro e das medidas

A avaliação realizada se baseia em testes usando dados simulados referentes ao movimento de um satélite rígido ao longo de uma órbita terrestre baixa e quase-equatorial durante o período de 1000 s iniciado às 12:00:00 (GMT) de 01/01/2008. Considera-se torque de controle nulo. O movimento verdadeiro, orbital e de atitude, e as medidas são simulados conforme descrito no Apêndice D. Desconsidera-se a ocorrência de eclipses. A Tabela 4.5 contém a atitude inicial (de S_B em relação a S_R) e a velocidade angular inicial (de S_B em relação a S_R e representada em S_B) do movimento simulado.

Tabela 4.5 Parâmetros da simulação do movimento verdadeiro para avaliação dos estimadores de velocidade angular.

Velocidade Angular Inicial	Quaténio Inicial ^(a)
$\boldsymbol{\omega}_0$	\mathbf{q}_0
$[5,0 \ 5,0 \ 5,0]' \text{ graus/s}$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]'$

^(a) O componente $q_{0,1}$ corresponde à parte real do quatérnio de rotação \mathbf{q}_0 .

Os distúrbios nas medidas da direção do Sol, $[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]'$, e no campo geomagnético, $\delta\mathbf{b}_{1,k}$, são considerados ruídos Gaussianos com médias nulas. Suas covariâncias são apresentadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 Covariâncias verdadeiras dos ruídos de medidas para avaliação dos estimadores de velocidade angular.

Medida	Covariância Verdadeira
Campo geomagnético	$\mathbf{R}_1^v = 4,0 \cdot 10^{-14} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (T)}^2$
Direção do Sol ^(a)	$\mathbf{R}_{\phi\theta}^v = \left(0,5 \frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot \mathbf{I}_2 \text{ rad}^2$

^(a) $\mathbf{R}_{\phi\theta}^v$ é a covariância do ruído de medidas, $\{[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]' \in \mathfrak{R}^2\}$, dos ângulos ilustrados na Figura D.3, no Apêndice D.

Conforme justificado no Apêndice D, o erro de medida vetorial da direção do Sol pode ser aproximado por,

$$\delta\mathbf{b}_{2,k} \cong \mathbf{\Pi}_k \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi_{s,k} \\ \delta\theta_{s,k} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

em que,

$$\mathbf{\Pi}_k \triangleq \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi_{s,k}) \cdot \text{cos}(\theta_{s,k}) & -\text{cos}(\phi_{s,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{s,k}) \\ -\text{sen}(\phi_{s,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{s,k}) & \text{cos}(\phi_{s,k}) \cdot \text{cos}(\theta_{s,k}) \\ \text{cos}(\phi_{s,k}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

e $\phi_{s,k}$ e $\theta_{s,k}$ são as medidas dos ângulos de azimute e de elevação do Sol ilustrados na Figura D.3 do Apêndice D.

Como $\{[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]' \in \mathfrak{R}^2\}$ tem média nula e covariância $\mathbf{R}_{\phi\theta}^v$, então a covariância $\mathbf{R}_{2,k}^v$ de $\{\delta\mathbf{b}_{2,k} \in \mathfrak{R}^3\}$ pode ser aproximada por $\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta}^v \cdot \mathbf{\Pi}_k' \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$. No entanto, como $\mathbf{R}_{\phi\theta}^v$ é uma matriz de ordem 2, o posto de $\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta}^v \cdot \mathbf{\Pi}_k'$ será no máximo 2 e, portanto, trata-se de uma matriz singular. O procedimento que será adotado aqui para contornar esse problema consiste simplesmente na soma de termos de pequena magnitude aos elementos da diagonal principal de $\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta}^v \cdot \mathbf{\Pi}_k'$ (Mendel, 1995), como explicitado adiante na Tabela 4.9.

4.3.2 Simulações de Monte Carlo

Utilizando-se as medidas sintetizadas conforme descrito acima, os estimadores de velocidade angular são avaliados a partir de simulações de Monte Carlo com 100 realizações considerando-se diferentes magnitudes para o período de amostragem e para o erro de inicialização. Nessas simulações, o conhecimento *a priori* da velocidade angular do satélite é modelado por $\mathcal{N}(\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{P}_0)$, onde $\boldsymbol{\omega}_0$ é a velocidade inicial verdadeira (conforme Tabela 4.5) e $\mathbf{P}_0 = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}_3$ é a covariância do erro de inicialização. Com base nisso, os estimadores são inicializados como mostrado na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 Inicialização dos estimadores de velocidade angular.

Estimadores DA	Estimadores EA
$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{0 0} = \boldsymbol{\omega}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{P}_0)$	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = [(\boldsymbol{\omega}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{P}_0))' \quad \mathbf{0}_{1 \times 6}]'$
$\mathbf{P}_{0 0} = \mathbf{P}_0 = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}_3$	$\mathbf{P}_{0 0}^x = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}$ (unidades no SI)

As Tabelas 4.8 e 4.9 apresentam os valores de parâmetros utilizados nos estimadores DA e EA, respectivamente. As covariâncias dos ruídos de medidas, \mathbf{R}_1^d e \mathbf{R}_2^d , e de estado, \mathbf{Q}^d , dos estimadores DA são obtidas, para períodos de amostragem de 0,1 s; 0,5 s e 1,0 s, através de sintonia. Nota-se que à medida que se aumenta T , os valores de \mathbf{R}_1^d e \mathbf{R}_2^d diminuem. Isto aparenta uma contradição, pois o aumento de T implica num maior erro numérico na computação das derivadas das medidas vetoriais. No entanto, tal aumento também implica na redução do ruído aleatório de medidas, conforme demonstrado no Apêndice C. Nos estimadores EA, as covariâncias dos ruídos de medidas, $\mathbf{R}_{1,k}$ e $\mathbf{R}_{2,k}$, são obtidas a partir das covariâncias verdadeiras, \mathbf{R}_1^v e $\mathbf{R}_{\phi\theta}^v$, consideradas conhecidas, enquanto que a covariância do ruído de estado, \mathbf{Q}^e , é sintonizada. Os componentes do tensor de inércia utilizado nas

equações de estado dos estimadores apresentam erros com magnitudes de 0,1 % de J_{33}^v ⁷. Os parâmetros κ das IUs dos estimadores DAUKF e EAUKF são ajustados de acordo com a regra $\kappa = 3 - n$, onde n é a dimensão do vetor de estado [vide seção 2.3].

Tabela 4.8 Parâmetros dos estimadores DA.

Parâmetro	Valor
\mathbf{R}_1^d , para $T = 0,1$ s	$5,0 \times 10^{-11} \cdot \mathbf{I}_3$ (T/s) ²
para $T = 0,5$ s	$5,0 \times 10^{-13} \cdot \mathbf{I}_3$ (T/s) ²
para $T = 1,0$ s	$4,0 \times 10^{-13} \cdot \mathbf{I}_3$ (T/s) ²
\mathbf{R}_2^d , para $T = 0,1$ s	$1,0 \times 10^{-3} \cdot \mathbf{I}_3$ (rad/s) ²
para $T = 0,5$ s	$2,0 \times 10^{-4} \cdot \mathbf{I}_3$ (rad/s) ²
para $T = 1,0$ s	$2,0 \times 10^{-6} \cdot \mathbf{I}_3$ (rad/s) ²
\mathbf{Q}^d , para $T = 0,1$ s	$1,0 \times 10^{-13} \cdot \mathbf{I}_3$ rad ² /s
para $T = 0,5$ s	$1,5 \times 10^{-13} \cdot \mathbf{I}_3$ rad ² /s
para $T = 1,0$ s	$1,5 \times 10^{-13} \cdot \mathbf{I}_3$ rad ² /s
\mathcal{J}	$\begin{bmatrix} 6,508 & 0,008 & -0,008 \\ 0,008 & 6,492 & -0,008 \\ -0,008 & -0,008 & 8,008 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$
κ (DAUKF)	0

Tabela 4.9 Parâmetros dos estimadores EA.

Parâmetro	Valor
\mathbf{Q}^e	$\text{diag} \left(5 \times 10^{-9} \cdot \mathbf{I}_3 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}}, 1 \times 10^{-15} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ T}^2 \cdot \text{s}, 1 \times 10^{-13} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ rad}^2 \cdot \text{s} \right)$
$\mathbf{R}_{1,k}$	\mathbf{R}_1^v (Vide Tabela 4.6)
$\mathbf{R}_{2,k}$	$\mathbf{\Pi}_k \cdot \mathbf{R}_{\phi\theta}^v \cdot \mathbf{\Pi}_k' + 10^{-6} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ rad}^2$
\mathcal{J}	$\begin{bmatrix} 6,508 & 0,008 & -0,008 \\ 0,008 & 6,492 & -0,008 \\ -0,008 & -0,008 & 8,008 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$
κ (EAUKE)	-6

A avaliação dos estimadores com respeito às suas taxas de convergência e acurácias é feita mediante o uso do índice de desempenho,

$$F_k = \left[(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k|k} - \boldsymbol{\omega}_k)' \cdot (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k|k} - \boldsymbol{\omega}_k) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

que consiste na norma Euclidiana do erro de estimação de velocidade angular no instante t_k .

⁷ Nas simulações deste trabalho, o momento de inércia do satélite em relação ao eixo Z_B é $J_{33}^v = 8,0 \text{ kg.m}^2$ [vide Apêndice D].

Utilizando período de amostragem $T = 0,1 \text{ s}$ e inicializações com $\sigma_0 = 5,0 \text{ graus/s}$, obtêm-se para cada estimador 100 realizações do índice F_k , das quais se computam a média \bar{F}_k e o desvio-padrão σ_k^F . A Figura 4.3 mostra os resultados obtidos. Por esses gráficos, observa-se a superioridade, em termos de acurácia, dos estimadores EA em relação aos DA. Na Figura 4.4, as curvas de $\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F$ são comparadas dentro da janela de tempo correspondente aos 50 s iniciais dos processos de estimação. Observa-se uma melhor taxa de convergência dos estimadores EA.

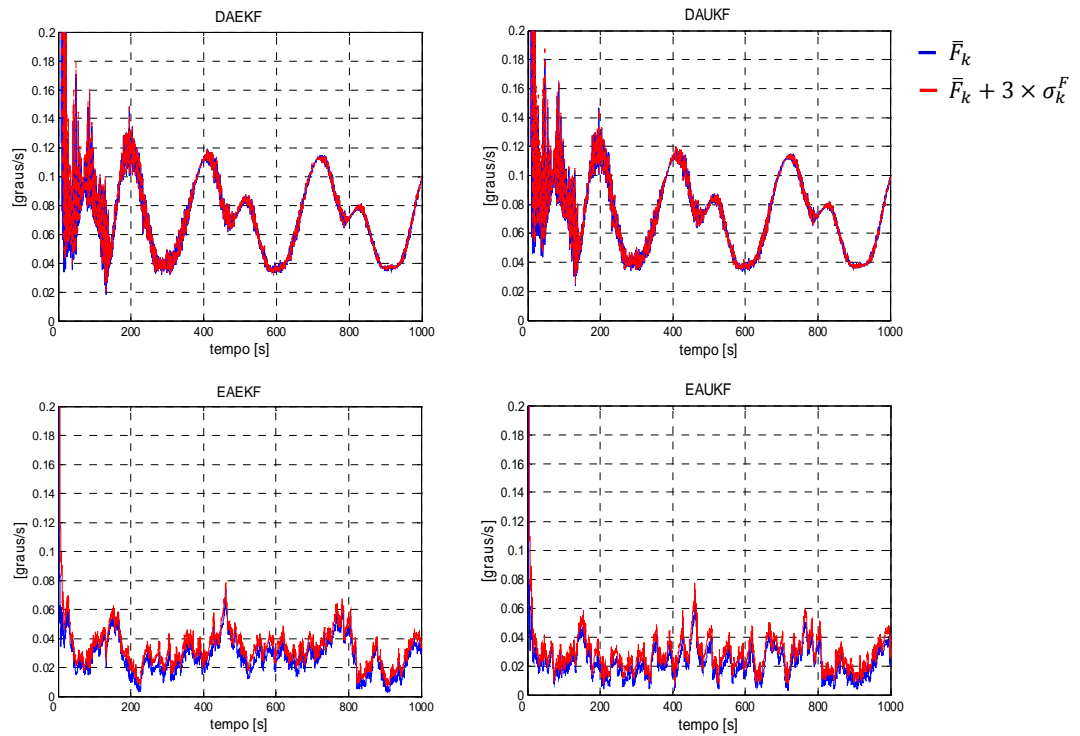


Figura 4.3 Índices de desempenho dos estimadores de velocidade angular – $T = 0,1 \text{ s}$,

$$\sigma_0 = 5,0 \text{ graus/s.}$$

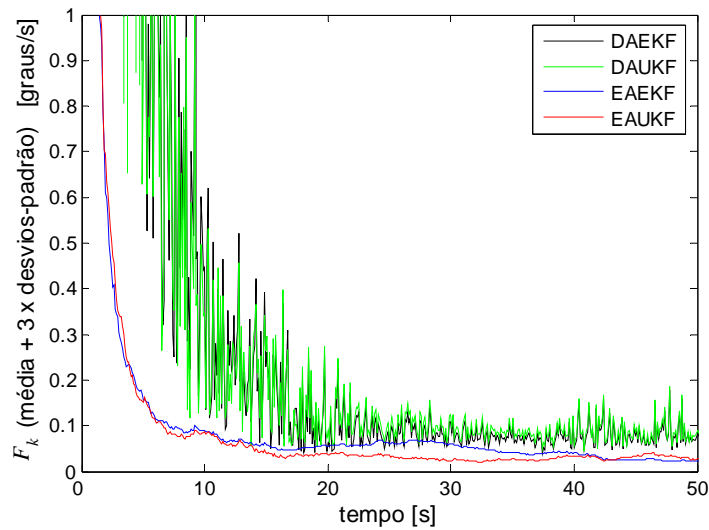


Figura 4.4 Taxas de convergência dos estimadores de velocidade angular – $T = 0,1$ s,

$$\sigma_0 = 5,0 \text{ graus/s.}$$

A Tabela 4.10 apresenta os valores máximos de $\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F$ para $\forall t_k \in (50, 1000]$ s, através dos quais são comparadas as acurácias dos estimadores considerando-se diferentes magnitudes para T . Conforme comentado em 4.2.1, nos estimadores DA, à medida que se aumenta T , acentua-se a influência do erro de derivação sobre a incerteza associada à equação de medidas (4.4). Isso justifica a degradação de acurácia observada com o aumento de T de 0,5 s para 1,0 s. Por outro lado, a redução de T leva a um aumento na intensidade do ruído aleatório das medidas computadas por (4.5) [vide Apêndice C]. Esse ruído é responsável pela degradação de acurácia dos estimadores DA observada quando se reduz T de 0,5 s para 0,1 s. Quanto aos estimadores EA, nota-se que, em geral, suas acurácias são melhores que as dos DA. Percebe-se ainda que, à medida que se aumenta T , destaca-se a superioridade do EAKUF em relação ao EAEKF.

Tabela 4.10 Acurácias dos estimadores de velocidade angular – $\sigma_0 = 5,0 \text{ graus/s}$.

Estimador	Máximo $\{\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F\}$ <i>graus/s</i>		
	$T = 0,1 \text{ s}$	$T = 0,5 \text{ s}$	$T = 1,0 \text{ s}$
DAEKF	0,149	0,130	0,191
DAUKF	0,147	0,129	0,198
EAEKF	0,078	0,127	0,176
EAUKF	0,077	0,092	0,103

Os estimadores são avaliados em relação a robustez ao erro de inicialização conforme descrito a seguir. Em 1000 realizações do processo de estimação de cada estimador, registra-se o número de vezes em que $\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F > 1 \text{ grau/s}$ para $t_k > 50 \text{ s}$. Esse número, denotado por $N_r(\sigma_0)$, é adotado como medida de robustez ao erro de inicialização do estimador em questão. Dessa forma, quanto menores os valores assumidos por $N_r(\sigma_0)$, maior é a robustez do correspondente estimador ao erro de inicialização. A Tabela 4.11 apresenta valores de $N_r(\sigma_0)$ considerando diferentes magnitudes para o desvio-padrão σ_0 . O período de amostragem é fixado em $T = 0,1 \text{ s}$. Observa-se uma maior robustez dos estimadores DA. Dentre os estimadores EA, destaca-se a maior robustez do EAUKF, o que concorda com investigações existentes na literatura comparando UKF com EKF (Julier e Uhlmann, 2004).

Tabela 4.11 Robustez dos estimadores de velocidade angular em relação ao erro de inicialização – $T = 0,1 \text{ s}$.

Estimador	$N_r(\sigma_0)$		
	$\sigma_0 = 5,0 \text{ graus/s}$	$\sigma_0 = 25,0 \text{ graus/s}$	$\sigma_0 = 50,0 \text{ graus/s}$
DAEKF	0	0	0
DAUKF	0	0	0
EAEKF	0	6	17
EAUKF	0	0	5

4.3.3 Carga computacional

Como na subseção 3.3.3, a carga computacional de cada estimador de velocidade angular é avaliada com base em cinco realizações de seu tempo de execução. Dessa amostra, computam-se a média, m_c , e o desvio-padrão, σ_c . A média m_c é utilizada como medida de carga computacional. A Tabela 4.12 apresenta os resultados obtidos. Os valores de σ_c mostram que as variabilidades das medidas de tempo de execução são pequenas. A terceira coluna contém as cargas computacionais relativas à carga do DAEKF, que apresenta o menor tempo de execução dentre os estimadores considerados. Observa-se que os estimadores DA são aproximadamente 3 vezes mais rápidos que os EA devido ao vetor de estado de menor dimensão. Nota-se também que os CD-EKFs têm cargas em torno de 3 vezes menores que as dos correspondentes CD-UKFs.

Tabela 4.12 Cargas computacionais dos estimadores de velocidade angular.

Estimador	Tempo de execução [s] m_c / σ_c	Carga relativa ao DAEKF
DAEKF	0,96/0,05	1
DAUKF	2,86/0,06	2,98
EAEKF	2,64/0,02	2,75
EAUKF	9,75/0,06	10,15

4.4 Comentários

Com base em simulações de Monte Carlo, avaliaram-se quatro estimadores de velocidade angular (DAEKF, DAUKF, EAEKF e EAUKF), os quais se formularam utilizando equações de estado e de medidas disponíveis na literatura. Graças ao uso de um modelo de cinemática de medidas vetoriais simplificado [vide (4.2)], os estimadores estudados não requerem o conhecimento das medidas vetoriais no sistema de referência nem

da atitude e da posição do veículo. *No entanto, conforme visto, tal modelo considera que o veículo se movimenta rapidamente.*

Na avaliação realizada na seção 4.3, os estimadores EA apresentaram melhores taxas de convergência e acurácias, ao passo que os DA exibiram maior robustez a erros de inicialização. A partir disso, sugere-se o uso dos estimadores DA na inicialização dos estimadores EA. Essa combinação resulta em métodos com a robustez dos estimadores DA e com a acurácia dos estimadores EA.

Estimadores de velocidade angular são aplicáveis a satélites de baixo custo que não embarcam girômetros e que tenham requisitos de acurácia grosseiros. Destaca-se ainda a aplicabilidade desses estimadores como componentes redundantes em sistemas que contenham girômetros.

5 SISTEMA DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE AUTÔNOMO PARA SATÉLITES DE BAIXO CUSTO

No presente capítulo, propõe-se um Sistema de Determinação de Atitude (SDA) autônomo para satélites de baixo custo que embarcam sensores solares e magnetômetro e se movem em órbitas terrestres baixas. Esse sistema emprega estimadores de *bias* de magnetômetro e de atitude e velocidade angular, os quais são aqui formulados. Os estimadores serão avaliados a partir de simulações considerando-se três movimentos de atitude distintos: movimento *lento*, *tumbling* e *spin*.

A seção 5.1 apresenta dois estimadores conjuntos de atitude e velocidade angular. A seção 5.2 revisa dois estimadores de *bias* de magnetômetro. A seção 5.3 propõe um SDA que emprega os estimadores apresentados nas seções 5.1 e 5.2. A seção 5.4 avalia, por meio de simulações de Monte Carlo, os estimadores que constituem o SDA proposto em 5.3. Por fim, a seção 5.5 apresenta uma síntese dos estudos realizados no capítulo.

5.1 Estimadores de atitude e velocidade angular

Estimadores de atitude e de velocidade angular foram estudados separadamente nos capítulos anteriores. Como visto, os estimadores de atitude requerem o conhecimento da velocidade angular do veículo em relação ao sistema de coordenadas de referência de forma que suas estimativas possam ser propagadas entre instantes de amostragem sucessivos. Santos e Waldmann (2007b), por meio de simulação, mostram que é possível se estimar atitude, com erro de aproximadamente 1 *grau*, através do QUKF ¹ e utilizando estimativas de velocidade angular produzidas pelo DAUKF ² em vez de girômetros. Tal abordagem é aqui evitada

¹ O QUKF é apresentado na Tabela 3.3.

² O DAUKF é apresentado na Tabela 4.2.

estimando-se atitude e velocidade angular conjuntamente, ou seja, através de um único estimador.

Métodos para estimação conjunta de atitude e velocidade angular a partir de medidas vetoriais são formulados agregando-se o modelo dinâmico (Equações de Euler) do satélite ao conjunto de equações de estado de um estimador MV de atitude. Na investigação sobre estimadores MV de atitude realizada no capítulo 3, os estimadores de quatérnio, QEKF e QUKF, exibiram melhores desempenhos em relação aos demais métodos estudados. Sendo assim, na presente seção são apresentados dois estimadores para estimação conjunta do quatérnio e da velocidade angular a partir de medidas vetoriais, o AVEKF e o AVUKF, que consistem, respectivamente, num CD-EKF e num CD-UKF.

5.1.1 Equações de estado e de medidas

O vetor de estado dos estimadores de quatérnio e velocidade angular é dado por $\mathbf{x} = [\mathbf{q}' \ \boldsymbol{\omega}']'$, onde $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]'$ é o quatérnio de rotação que representa a atitude de S_B em relação a S_R e $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]'$ é a velocidade angular de S_B em relação a S_R e representada em S_B .

Concatenando-se o modelo da cinemática do quatérnio [dado por (3.6)] com o modelo dinâmico de um veículo rígido e sem rodas de reação [dado por (4.3)], obtém-se a seguinte equação de estado não-linear e contínua no tempo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) + \mathbf{w}(t) \quad (5.1)$$

onde $\boldsymbol{\tau}(t)$ é o torque de controle (conhecido) considerado constante entre instantes de amostragem sucessivos, ou seja, $\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}_k$ para $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$; e, sendo $[\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \times]$ a matriz produto vetorial referente ao vetor *momentum* angular $\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$, a função não-linear $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ é dada por,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{q} \\ \mathcal{J}^{-1} \cdot [\mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \times] \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathcal{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

A matriz anti-simétrica $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$ é dada em (3.7) e, por conveniência, é aqui repetida,

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}' \\ \boldsymbol{\omega} & -[\boldsymbol{\omega} \times] \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

O ruído de estado $\mathbf{w}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{w}^d(t)']'$, em que $\mathbf{w}^d(t) = [w_x^d(t) \ w_y^d(t) \ w_z^d(t)]'$ modela torques específicos de perturbação e incertezas na matriz de inércia, é considerado um processo branco com média nula e densidade espectral de potência \mathbf{Q} . Embora o modelo de cinemática para o quatérnio apresente incerteza nula, na implementação dos estimadores, a matriz \mathbf{Q} será sintonizada com todos os seus auto-valores positivos. Dessa forma, evita-se que a matriz covariância do erro de estimação tenha auto-valores que converjam a zero, o que provocaria divergência da estimação (Bar-Shalom e Li, 1993).

A equação de medidas não-linear e discreta no tempo utilizada pelos estimadores de quatérnio na seção 3.2.1 é também empregada nos estimadores AVEKF e AVUKF. Sendo assim, levando-se em conta as medidas vetoriais do campo geomagnético, $(\mathbf{b}_{1,k+1}, \mathbf{r}_{1,k+1})$, e da direção do Sol, $(\mathbf{b}_{2,k+1}, \mathbf{r}_{2,k+1})$, essa equação é reescrita como,

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) + \delta \mathbf{b}_{k+1} \quad (5.4)$$

onde,

$$\mathbf{b}_{k+1} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,k+1} \\ \mathbf{b}_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{q}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1} \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}_{k+1}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\delta \mathbf{b}_{k+1} \triangleq \begin{bmatrix} \delta \mathbf{b}_{1,k+1} \\ \delta \mathbf{b}_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Os ruídos nas medidas vetoriais, $\{\delta \mathbf{b}_{1,k}\}$ e $\{\delta \mathbf{b}_{2,k}\}$, são considerados como sendo seqüências brancas de médias nulas e covariâncias conhecidas $\mathbf{R}_{1,k}$ e $\mathbf{R}_{2,k}$, respectivamente. Sendo assim, $\{\delta \mathbf{b}_{k+1}\}$ é uma seqüência branca com média nula e covariância,

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,k} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{2,k} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.1.2 Estimador AVEKF

Utilizando-se o CD-EKF – revisado no capítulo 2 – para estimar conjuntamente atitude e velocidade angular mediante o uso da *equação de estado* (5.1) e da *equação de medidas* (5.4), obtém-se o estimador AVEKF³ apresentado na Tabela 5.1. Como no QEKF, as estimativas de quatérnio do AVEKF são normalizadas após o estágio de atualização sem que haja mudança na covariância \mathbf{P} . O AVEKF requer as matrizes Jacobianas do estado e das medidas dadas de forma explícita no Apêndice B e representadas aqui respectivamente por,

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}(t))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (5.9)$$

e

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \quad (5.10)$$

³ AVEKF – Attitude and Angular Velocity Extended Kalman Filter.

Tabela 5.1 Estimador de atitude e velocidade angular – AVEKF.

Parâmetros	\mathbf{R}_k	(Considerada conhecida. Vide (5.8))
	\mathbf{Q}	(Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0}^* = [\hat{\mathbf{q}}_0' \ \hat{\boldsymbol{\omega}}_0']'$	$\mathbf{P}_{0 0}^* = \mathbf{P}_0$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$	
	$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \cdot \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))' + \mathbf{Q}$	
1b – Predição das medidas	$\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k} = \mathbf{h}_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k})$	
	$\mathbf{P}_{k+1 k}^b = (\mathbf{H}_{k+1}) \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1})' + \mathbf{R}_{k+1}$	
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{xb} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1})'$	
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{xb} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$	
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{b}_{k+1} - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$	
	$\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$	
3 – Normalização	$\hat{\mathbf{q}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_3 \ \hat{x}_4]'_{k+1 k+1}$	
	$\hat{\mathbf{q}}^* = \hat{\mathbf{q}} / \ \hat{\mathbf{q}}\ $	
	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1}^* = [\hat{\mathbf{q}}^{*'} \ \hat{x}_5 \ \hat{x}_6 \ \hat{x}_7]'_{k+1 k+1}$	
	$\mathbf{P}_{k+1 k+1}^* = \mathbf{P}_{k+1 k+1}$	
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.		

^(a) A integração das equações diferenciais em (1a) é realizada mediante o uso do método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = 0,1$ s e partindo-se das condições iniciais $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*$ e $\mathbf{P}_{k|k}^*$.

5.1.3 Estimador AVUKF

Utilizando-se o CD-UKF – revisado no capítulo 2 – para estimar conjuntamente atitude e velocidade angular mediante o uso da *equação de estado* (5.1) e da *equação de medidas* (5.4), obtém-se o estimador AVUKF ⁴ apresentado na Tabela 5.2. Como visto na seção 3.3, o uso da normalização *unscented* não resultou em melhoria significativa de desempenho do QUKF em relação ao QEKf. Sendo assim, por simplicidade, o AVUKF normaliza as estimativas de quatérnio da mesma forma que o QEKf.

⁴ AVUKF – Attitude and Angular Velocity Unscented Kalman Filter.

Tabela 5.2 Estimador de atitude e velocidade angular – AVUKF.

Parâmetros	\mathbf{R}_k	(Considerada conhecida. Vide (5.8))
	\mathbf{Q}	(Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0}^* = [\hat{\mathbf{q}}_0' \ \hat{\boldsymbol{\omega}}_0']'$	$\mathbf{P}_{0 0}^* = \mathbf{P}_0$
1a - Propagação do estado estimado ^(a)	$[\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}] = \text{IU}(\hat{\mathbf{x}}_{k k}, \mathbf{P}_{k k}, \mathbf{f}(\cdot, \boldsymbol{\tau}(t)), \mathbf{Q})$	
1b – Predição das medidas/cov. cruzada	$[\hat{\mathbf{b}}_{k+1 k}, \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b, \mathbf{P}_{k+1 k}^{xb}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}, \mathbf{h}_{k+1}(\cdot))$	
	$\mathbf{P}_{k+1 k}^b = \bar{\mathbf{P}}_{k+1 k}^b + \mathbf{R}_{k+1}$	
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{xb} \cdot (\mathbf{P}_{k+1 k}^b)^{-1}$	
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (\mathbf{b}_{k+1} - \hat{\mathbf{b}}_{k+1 k})$	
	$\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot \mathbf{P}_{k+1 k}^b \cdot \mathbf{K}_{k+1}'$	
3 – Normalização	$\hat{\mathbf{q}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_3 \ \hat{x}_4]'_{k+1 k+1}$	
	$\hat{\mathbf{q}}^* = \hat{\mathbf{q}} / \ \hat{\mathbf{q}}\ $	
	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1}^* = [\hat{\mathbf{q}}^{*'} \ \hat{x}_5 \ \hat{x}_6 \ \hat{x}_7]'_{k+1 k+1}$	
	$\mathbf{P}_{k+1 k+1}^* = \mathbf{P}_{k+1 k+1}$	
4 – Voltar a (1) até fim da estimação.		

^(a) As equações diferenciais (2.36) e (2.37) da IU são integradas utilizando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo fixo de tamanho $h = 0,1$ s.

5.2 Estimadores de *bias* de magnetômetro

A acurácia da determinação de atitude baseada em medidas de magnetômetro é influenciada de forma relevante pela calibração em vôo desse sensor (Crassidis *et al.*, 2005). A calibração completa de magnetômetro envolve a estimação de *bias*, fatores de escala e correções de não-ortogonalidade entre seus eixos X, Y e Z. Embora esses parâmetros possam ser estimados em laboratório, é possível que seus valores sofram alterações significativas após o lançamento do satélite. Tipicamente, alterações do fator de escala e da não-ortogonalidade ocorrem devido a gradientes térmicos e a *stress* mecânico. Alterações de *bias* se devem a mudanças no campo magnético residual do satélite bem como a interferências magnéticas nas proximidades do magnetômetro.

O algoritmo TWOSTEP (Alonso e Shuster, 2002a) foi desenvolvido para estimar *bias* de magnetômetro independentemente do conhecimento da atitude do satélite. Esse método foi posteriormente estendido de forma a estimar, adicionalmente, fatores de escala e correções de

não-ortogonalidade (Alonso e Shuster, 2002b). Utilizando o mesmo modelo de medidas desse método estendido, Crassidis *et al.* (2005) formula dois estimadores recursivos para calibração completa de magnetômetros em tempo real: um EKF e um UKF.

Com o intuito de se obter um sistema de determinação de atitude simples para aplicação em satélites de baixo custo, considera-se aqui apenas a estimação de *bias*, que exerce influência significativa sobre a acurácia em regime permanente dos estimadores de atitude e velocidade angular (Hoth, 2000). São apresentados em seguida dois estimadores, um EKF e um UKF, que empregam a equação de medidas do TWOSTEP.

5.2.1 Equações de estado e de medidas

O vetor de estado dos estimadores de *bias* é dado por $\mathbf{c} = [c_x \ c_y \ c_z]'$. Esse vetor é modelado como um processo de Wiener em tempo discreto,

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \delta\mathbf{c}_k \quad (5.11)$$

onde $\{\delta\mathbf{c}_k\}$ é considerado uma seqüência branca com média nula e covariância \mathbf{Q}^c .

Considerando-se que o magnetômetro tenha fatores de escala unitários e que os seus eixos, $\{X_m, Y_m, Z_m\}$, sejam perfeitamente ortogonais entre si, então sua medida bruta no instante t_k , $\check{\mathbf{b}}_{1,k}$, pode ser modelada por,

$$\check{\mathbf{b}}_{1,k} = \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{r}_{1,k} + \mathbf{c}_k + \delta\mathbf{b}_{1,k} \quad (5.12)$$

onde \mathbf{D}_k é a DCM que representa a atitude verdadeira do sistema de coordenados do sensor, $S_m \equiv \{X_m, Y_m, Z_m\}$, em relação a S_R , \mathbf{c}_k é o vetor de *bias* e $\{\delta\mathbf{b}_{1,k}\}$ é uma seqüência branca com média nula e covariância $\mathbf{R}_{1,k}$.

O modelo de medidas escalar dos estimadores de *bias* é dado por (Alonso e Shuster, 2002a),

$$z_{k+1} = h_{k+1}^c(\mathbf{c}_{k+1}) + \delta z_{k+1} \quad (5.13)$$

onde,

$$z_{k+1} \triangleq \|\check{\mathbf{b}}_{1,k+1}\| - \|\mathbf{r}_{1,k+1}\| \quad (5.14)$$

$$h_{k+1}^c(\mathbf{c}_{k+1}) \triangleq 2 \cdot \check{\mathbf{b}}'_{1,k+1} \cdot \mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}'_{k+1} \cdot \mathbf{c}_{k+1} \quad (5.15)$$

e $\{\delta z_{k+1}\}$ é considerado uma seqüência de variáveis aleatórias Gaussianas com média e variância dadas por,

$$\mu_{k+1} = -\text{traço}\{\mathbf{R}_{1,k+1}\} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{k+1}^2 = 4 \cdot (\check{\mathbf{b}}'_{1,k+1} - \mathbf{c}'_{k+1})' \cdot \mathbf{R}_{1,k+1} \cdot (\check{\mathbf{b}}'_{1,k+1} - \mathbf{c}'_{k+1}) + 2 \cdot \text{traço}\{\mathbf{R}_{1,k+1}^2\} \quad (5.17)$$

Nota-se que a variância σ_{k+1}^2 depende do valor verdadeiro do *bias*, \mathbf{c}_{k+1} . Como esse valor é desconhecido, na implementação dos estimadores utiliza-se $\hat{\mathbf{c}}_{k+1|k}$ em seu lugar. Nesse caso, representa-se a variância do ruído de medidas por $\hat{\sigma}_{k+1}^2$. Diferentemente dos demais estimadores estudados neste trabalho, o ruído de medidas apresenta média não-nula, a qual deve ser levada em conta no cálculo da medida predita nos estimadores de *bias*.

5.2.2 Estimador MAGEKF

Utilizando-se o EKF – revisado no capítulo 2 – para estimar *bias* de magnetômetro mediante o uso da *equação de estado* (5.11) e da *equação de medidas* (5.13), obtém-se o estimador MAGEKF apresentado na Tabela 5.3. Esse estimador requer a matriz Jacobiana das medidas derivada no Apêndice B e aqui representada por,

$$\mathbf{H}_{k+1}^c = \left. \frac{\partial h_{k+1}^c(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}_{k+1|k}} \quad (5.18)$$

Tabela 5.3 Estimador de *bias* de magnetômetro – MAGEKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{1,k}$	(Considerada conhecida)
	\mathbf{Q}^c	(Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\mathbf{c}}_{0 0} = \hat{\mathbf{c}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = \mathbf{P}_0^c$	
1a - Propagação do estado estimado	$\hat{\mathbf{c}}_{k+1 k} = \hat{\mathbf{c}}_{k k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = \mathbf{P}_{k k} + \mathbf{Q}^c$	
1b – Predição da medida	$\hat{z}_{k+1 k} = h_{k+1}^c(\hat{\mathbf{c}}_{k+1 k}) + \mu_{k+1}$ $P_{k+1 k}^z = (\mathbf{H}_{k+1}^c) \cdot \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^c)' + \hat{\sigma}_{k+1}^2$	
1c – Covariância cruzada	$\mathbf{P}_{k+1 k}^{cz} = \mathbf{P}_{k+1 k} \cdot (\mathbf{H}_{k+1}^c)'$	
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{cz} \cdot (P_{k+1 k}^z)^{-1}$	
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{c}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{c}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (z_{k+1} - \hat{z}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot P_{k+1 k}^z \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$	
3 – Voltar a (1) até fim da estimação.		

5.2.3 Estimador MAGUKF

Utilizando-se o UKF – revisado no capítulo 2 – para estimar *bias* de magnetômetro mediante o uso da *equação de estado* (5.11) e da *equação de medidas* (5.13), obtém-se o estimador MAGUKF apresentado na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 Estimador de *bias* de magnetômetro – MAGUKF.

Parâmetros	$\mathbf{R}_{1,k}$	(Considerada conhecida)
	\mathbf{Q}^c	(Sintonizada)
Inicialização	$\hat{\mathbf{c}}_{0 0} = \hat{\mathbf{c}}_0 \quad \mathbf{P}_{0 0} = \mathbf{P}_0^c$	
1a - Propagação do estado estimado	$\hat{\mathbf{c}}_{k+1 k} = \hat{\mathbf{c}}_{k k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = \mathbf{P}_{k k} + \mathbf{Q}^c$	
1b – Predição da medida/cov. cruzada	$[\bar{z}_{k+1 k}, \bar{P}_{k+1 k}^z, \mathbf{P}_{k+1 k}^{cz}] = \text{TU}(\hat{\mathbf{c}}_{k+1 k}, \mathbf{P}_{k+1 k}, h_{k+1}^c(\cdot))$ $\hat{z}_{k+1 k} = \bar{z}_{k+1 k} + \mu_{k+1}$ $P_{k+1 k}^z = \bar{P}_{k+1 k}^z + \hat{\sigma}_{k+1}^2$	
2a – Ganho	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k}^{cz} \cdot (P_{k+1 k}^z)^{-1}$	
2b – Atualização da estimativa	$\hat{\mathbf{c}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{c}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} \cdot (z_{k+1} - \hat{z}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \cdot P_{k+1 k}^z \cdot (\mathbf{K}_{k+1})'$	
3 – Voltar a (1) até fim da estimação.		

5.3 Um sistema de determinação de atitude para satélites de baixo custo

Devido à tendência atual em se desenvolver satélites pequenos, leves e de baixo custo (Azor *et al.*, 2001), começaram a surgir, na literatura especializada, diversos métodos de controle utilizando bobinas magnéticas como atuadores (Bak *et al.*, 1996) e estimadores de atitude e velocidade angular baseados apenas em sensores de atitude (Challa *et al.*, 1996), como os magnetômetros e os sensores solares. Tais atuadores e sensores apresentam baixos custos, são leves, consomem pouca potência elétrica, e ocupam pouco espaço, características que fazem deles instrumentos adequados às aplicações de baixo custo.

O satélite ITASAT, por consistir numa missão de baixo custo, motivou a proposta de um sistema de determinação de atitude (SDA) autônomo que emprega medidas de magnetômetro e sensores solares na estimação de atitude e velocidade angular. A Figura 5.1 ilustra esse sistema, cujos componentes são descritos em seguida.

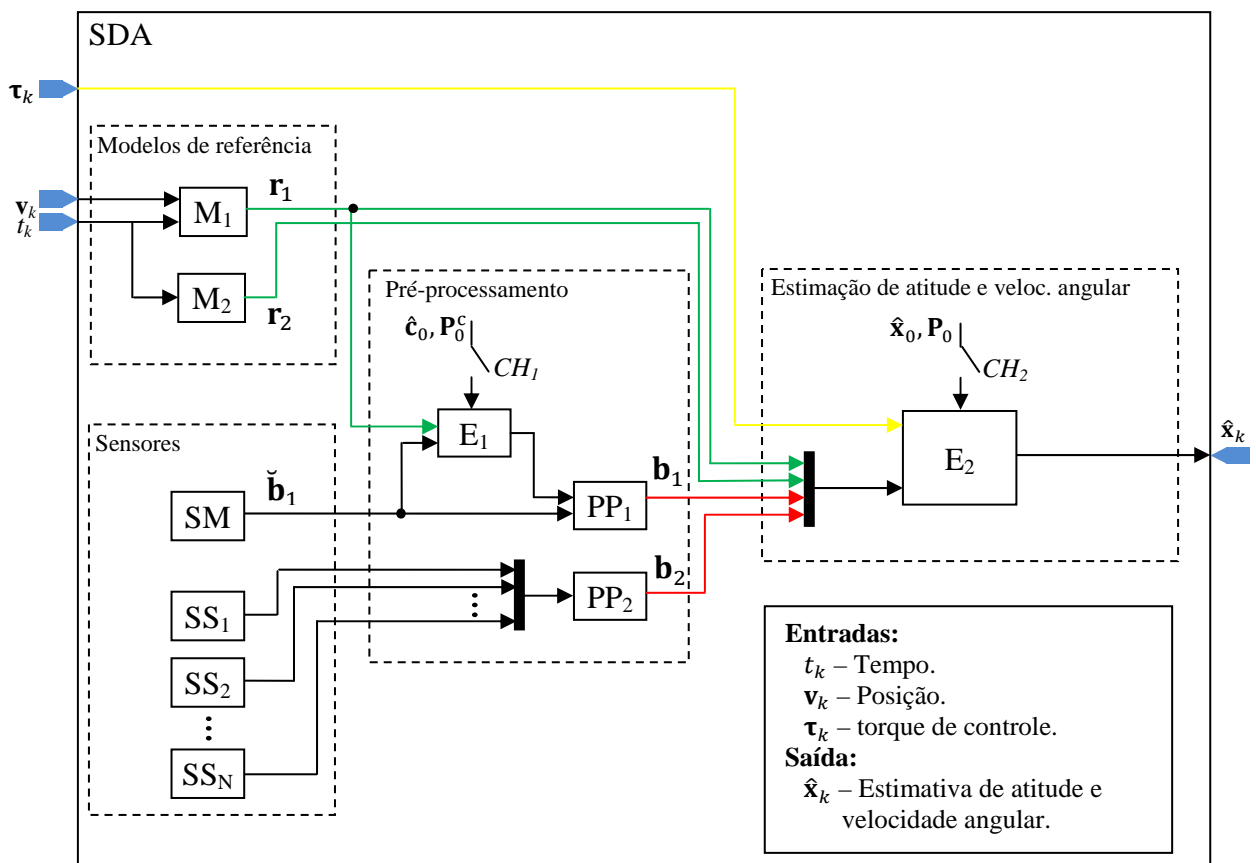


Figura 5.1 Um SDA para satélites de baixo custo.

Modelos de referência

O modelo de referência adotado para o campo geomagnético, M_1 , é o WMM2005 (McLean *et al.*, 2004), que consiste numa expansão em série de harmônicos esféricos até grau 12. Conforme ilustrado na Figura 5.1, esse modelo requer o conhecimento do tempo no instante de amostragem do magnetômetro e dos sensores solares, t_k , e da posição do satélite, \mathbf{v}_k . O modelo da direção do Sol, M_2 , considerado é dado pelo algoritmo 29 em Vallado (2004).

Sensores

O sistema emprega como sensores um magnetômetro de 3 eixos, SM, e N sensores solares de 2 eixos, SS_1, SS_2, \dots, SS_N . Os sinais de saída do magnetômetro correspondem ao vetor campo geomagnético representado no sistema de coordenadas, S_m , solidário ao sensor. Os sinais de saída de cada sensor solar correspondem a um par de ângulos solares, ϕ e θ , a partir dos quais se pode computar o vetor unitário que informa a direção do Sol no sistema de coordenadas do corpo, S_B [por exemplo, vide ângulos ilustrados na Figura D.3]. A quantidade N deve ser suficiente para que, fora de períodos de eclipse do Sol, sempre haja linha de visada entre o Sol e ao menos um dos sensores solares. Considera-se que todos os sensores fornecem suas medidas na mesma estampa de tempo t_k .

Pré-processamento

Considerando que o magnetômetro tenha fatores de escala unitários e que a atitude de seu sistema de coordenadas, S_m , em relação ao sistema S_B seja conhecida e descrita pela DCM \mathbf{D}_m^B , então no bloco PP₁ da Figura 5.1, a medida vetorial \mathbf{b}_1 é computada a partir da medida bruta, $\check{\mathbf{b}}_1$, através de,

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{D}_m^B)'. (\check{\mathbf{b}}_1 - \hat{\mathbf{c}}) \quad (5.19)$$

onde $\hat{\mathbf{c}}$ é o *bias* estimado em E_1 . O estimador contido no bloco E_1 , que pode ser o MAGEKF ou o MAGUKF, é inicializado com $\hat{\mathbf{c}}_0$ e \mathbf{P}_0^c mediante o fechamento da chave CH_1 , evento que deve anteceder o início da estimação de atitude e velocidade angular com o tempo suficiente para a convergência das estimativas de *bias*.

O pré-processamento das medidas dos sensores solares, PP_2 , é constituído de três passos. O primeiro consiste na seleção de um dos N sensores como sendo o fornecedor das medidas. O sensor selecionado deve ser aquele cuja direção normal melhor se aproxime da linha de visada para o Sol. Tendo sido selecionado o sensor SS_j , o segundo passo trata do cálculo do vetor unitário, \mathbf{s}_j , da direção do Sol no sistema de coordenadas desse sensor, denotado por S_{Sj} , utilizando-se os ângulos medidos ϕ_j e θ_j . A atitude de S_{Sj} em relação a S_B é conhecida e descrita pela DCM \mathbf{D}_j^B . Considera-se, por simplicidade, que os sensores solares também tenham fatores de escala unitários. Por fim, no terceiro passo, converte-se o vetor \mathbf{s}_j para o sistema S_B mediante o uso de \mathbf{D}_j^B , obtendo-se a medida vetorial,

$$\mathbf{b}_2 = (\mathbf{D}_j^B)' \cdot \mathbf{s}_j \quad (5.20)$$

A expressão útil para se calcular \mathbf{s}_j em função de ϕ_j e θ_j depende dos ângulos medidos pelo sensor empregado. Por exemplo, considerando-se um sensor que meça o azimute e a elevação do Sol (SSTL, 2008), tem-se,

$$\mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \cos(\phi_j) \cdot \text{sen}(\theta_j) \\ \cos(\phi_j) \cdot \cos(\theta_j) \\ \text{sen}(\phi_j) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Estimação de atitude e velocidade angular

O estimador de atitude e velocidade angular contido no bloco E_2 , que pode ser o AVEKF ou o AVUKF, é inicializado com $\hat{\mathbf{x}}_0$ e \mathbf{P}_0 mediante o fechamento da chave CH_2 .

Esses estimadores requerem como dados de entrada as medidas vetoriais pré-processadas referentes ao campo geomagnético, \mathbf{b}_1 , e à direção do Sol, \mathbf{b}_2 , além do torque de controle, $\boldsymbol{\tau}$, produzido pelo Sistema de Controle de Atitude (SCA) do satélite.

Em seguida, os estimadores de *bias*, MAGEKF e MAGUKF, e os estimadores de atitude e velocidade angular, AVEKF e AVUKF, são avaliados a partir de simulações.

5.4 Avaliação dos estimadores do SDA utilizando dados simulados

O SDA apresentado na seção anterior será em seguida avaliado por meio de testes usando medidas simuladas. A subseção 5.4.1 avalia os estimadores de *bias* de magnetômetro enquanto a subseção 5.4.2 avalia os estimadores de atitude e velocidade angular.

O movimento verdadeiro, orbital e de atitude, e as medidas são simulados conforme descrito no Apêndice D. Considera-se torque de controle nulo. São considerados três movimentos distintos cujas condições iniciais são apresentadas na Tabela 5.5. O movimento rotulado como *lento* é inicializado com o satélite rotacionando a uma taxa de aproximadamente 1 rotação/órbita em torno do eixo Z_B , o qual inicialmente está orientado perpendicularmente ao plano da eclíptica. O movimento rotulado como *spin* consiste na rotação em torno do eixo Z_B a uma taxa de 40 rpm e inclui nutação causada por movimentos mais lentos em torno dos eixos transversais. Por fim, o movimento rotulado como *tumbling* (capotamento) representa aqui um estado arbitrário semelhante ao que pode ocorrer após o satélite ser injetado em órbita.

Tabela 5.5 Condições iniciais dos movimentos utilizados na avaliação do SDA proposto.

Movimento	Velocidade Angular Inicial ω_0 [rad/s]	Quatérnio Inicial q_0
<i>Lento</i>	$[1,0 \cdot 10^{-6} \ 1,0 \cdot 10^{-6} \ 1,047 \cdot 10^{-3}]'$	$[0,97906 \ 0,20361 \ 0 \ 0]'$
<i>Spin</i>	$[0,1 \ 0,1 \ 4,18]'$	$[0,97906 \ 0,20361 \ 0 \ 0]'$
<i>Tumbling</i>	$[8,73 \cdot 10^{-2} \ 8,73 \cdot 10^{-2} \ 8,73 \cdot 10^{-2}]'$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]'$

Como descrito no Apêndice D, considera-se, por simplicidade, que há apenas um sensor solar alinhado com o sistema S_B , evitando-se, dessa forma, a transformação de coordenadas dada por (5.20). Considera-se também que o magnetômetro esteja alinhado com S_B . O distúrbio simulado para as medidas dos ângulos solares, $\{[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]'\}$, consiste numa seqüência branca Gaussiana com média nula e covariância $\mathbf{R}_{\phi\theta} = (0,5 \cdot \pi/180)^2 \cdot \mathbf{I}_2 \text{ rad}^2$. O distúrbio de medidas do campo geomagnético consiste na soma de uma seqüência branca Gaussiana com média nula e covariância $\mathbf{R}_{1,k} = 4,0 \cdot 10^{-14} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (T)}^2$ com uma seqüência Markoviana gerada pela saída de um sistema dinâmico linear de primeira ordem excitado por uma seqüência branca Gaussiana com média nula e covariância $q_m \cdot \mathbf{I}_3$. A função de transferência desse sistema linear é dada por,

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{T_m \cdot (z + e^{-t/T_m})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z}{T_m \cdot (z + e^{-t/T_m})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{T_m \cdot (z + e^{-t/T_m})} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Shorshi e Bar-Itzhack (1995) utilizam $q_m = 1,0 \cdot 10^{-11} \text{ (T)}^2$ e $T_m = 100 \text{ s}$ na modelagem do distúrbio de medidas do magnetômetro embarcado no satélite GRO. Esses mesmos valores serão adotados aqui.

A informação de posição, \mathbf{v}_k , utilizada nos testes do SDA consiste na posição verdadeira perturbada por uma seqüência Gaussiana com média nula e covariância igual a

$100 \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (km)}^2$. A estampa de tempo, t_k , também requerida pelo SDA é considerada igual ao tempo verdadeiro nos instantes de amostragem dos sensores.

5.4.1 Estimação de *bias* de magnetômetro

Os estimadores de *bias*, MAGEKF e MAGUKF, apresentados na seção 5.2 são avaliados considerando-se os movimentos *lento*, de *spin* e de *tumbling*. O *bias* verdadeiro tem valor $\mathbf{c} = [5,0 \ 5,0 \ 5,0]'. 10^{-6} \text{ T}$. Os estimadores são inicializados com $\hat{\mathbf{c}}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{3 \times 1}, \sigma_c^2 \cdot \mathbf{I}_3)$ e $\mathbf{P}_0^c = \sigma_c^2 \cdot \mathbf{I}_3$, onde $\sigma_c = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. A covariância do ruído de estado é sintonizada em $\mathbf{Q}^c = 1,0 \cdot 10^{-12} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (T)}^2$.

Para cada movimento, fez-se uma simulação de Monte Carlo gerando-se uma amostra contendo 100 realizações das estimativas de *bias* no instante final, t_f , da janela de dados considerada. A média e o desvio-padrão dessa amostra são denotados, respectivamente, por \bar{c}_f e σ_f . Utilizando uma janela de dados de 1 hora iniciando-se às 12:00:00 (GMT) do dia 1º de Janeiro de 2008 e período de amostragem $T = 1 \text{ s}$, obtêm-se os resultados para os movimentos de *spin* e de *tumbling* mostrados, respectivamente, na Tabela 5.6 e na Tabela 5.7. Quando se considera o movimento *lento*, as janelas de dados de 1 hora de duração não são suficientes para a convergência dos estimadores de *bias*. Nesse caso, foram utilizadas janelas de 8 horas e período de amostragem $T = 10 \text{ s}$. Os resultados são apresentados na Tabela 5.8.

Tabela 5.6 Estimativas de *bias* de magnetômetro – movimento de *spin*.

Parâmetro	Valor verdadeiro [mG]	$\bar{c}_f(\sigma_f)$ [mG]	
		MAGEKF	MAGUKF
c_x	50	50,001(0,092)	49,950(0,151)
c_y	50	49,992(0,102)	49,959(0,154)
c_z	50	48,597(0,070)	49,696(0,095)

Obs.: Janela de 1h de duração, $T = 1 \text{ s}$.

Tabela 5.7 Estimativas de *bias* de magnetômetro – movimento de *tumbling*.

Parâmetro	Valor verdadeiro [mG]	$\bar{c}_f(\sigma_f)$ [mG]	
		MAGEKF	MAGUKF
c_x	50	50,042(0,068)	49,930(0,117)
c_y	50	49,980(0,077)	50,027(0,129)
c_z	50	49,132(0,082)	50,039(0,110)

Obs.: Janela de 1h de duração, $T = 1$ s.

Tabela 5.8 Estimativas de *bias* de magnetômetro – movimento *lento*.

Parâmetro	Valor verdadeiro [mG]	$\bar{c}_f(\sigma_f)$ [mG]	
		MAGEKF	MAGUKF
c_x	50	51,497(0,160)	51,475(0,176)
c_y	50	48,735(0,155)	48,667(0,190)
c_z	50	50,171(0,160)	50,237(0,180)

Obs.: Janela de 8h de duração, $T = 10$ s.

Observa-se nas tabelas acima que o estimador MAGUKF produz saídas com variabilidade ligeiramente maior que as do MAGEKF. Nota-se ainda que, em todos os casos simulados, os erros de estimação dos três componentes do vetor de *bias* ficaram abaixo de $2,0 \cdot 10^{-7}$ T.⁵

Avaliando-se as cargas computacionais dos estimadores de *bias* como nas subseções 3.3.3 e 4.3.3, constata-se que o tempo de execução do MAGUKF é aproximadamente igual ao dobro do tempo de execução do MAGEKF.

5.4.2 Estimação de atitude e velocidade angular – sem eclipse

Os estimadores de atitude e velocidade angular, AVEKF e AVUKF, apresentados na seção 5.1 são avaliados mediante simulações de Monte Carlo considerando-se os movimentos

⁵ 1 mG = 10^{-7} T.

lento, de *spin* e de *tumbling*. Considera-se, dada a investigação descrita na subseção 5.4.1, que as medidas do campo geomagnético contenham um *bias* residual constante com valor $\mathbf{c}_{res} = [-2 \ 2 \ -2]' \cdot 10^{-7} \text{ T}^6$. A janela de dados empregada tem duração de 1000 s e inicia-se às 20:00:00 (GMT) de 1º de Janeiro de 2008. Durante esse intervalo de tempo, *considera-se que não haja eclipse*.

A estimativa inicial de atitude é obtida através do método estático TRIAD [vide Wertz (1978), p. 424]. A estimativa inicial da velocidade angular é modelada como sendo a soma da velocidade angular inicial verdadeira com um VA Gaussiano de média nula e covariância $\sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}_3$, sendo $\sigma_0 = 10 \cdot \pi / 180 \text{ rad/s}$. A covariância inicial é sintonizada como,

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0,0001 \cdot \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

A covariância, $\mathbf{R}_{2,k}$, do ruído das medidas vetoriais da direção do Sol é calculada, como no capítulo 3 [vide (3.65)], utilizando a covariância dos ruídos de medidas dos sensores solares, $\mathbf{R}_{\phi\theta}$. A densidade espectral de potência do ruído de estado, \mathbf{Q} , é obtida por sintonia e assume valor distinto para cada um dos três movimentos considerados, conforme explicitado na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 Densidade espectral de potência do ruído de estado.

Movimento	\mathbf{Q}
Lento	$diag\{1,0 \cdot 10^{-12} \cdot \mathbf{I}_4; 5,0 \cdot 10^{-10} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ rad}^2/\text{s}\}$
<i>Spin</i>	$diag\{8,0 \cdot 10^{-6} \cdot \mathbf{I}_4; 2,0 \cdot 10^{-5} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ rad}^2/\text{s}\}$
<i>Tumbling</i>	$diag\{1,0 \cdot 10^{-6} \cdot \mathbf{I}_4; 1,0 \cdot 10^{-7} \cdot \mathbf{I}_3 \text{ rad}^2/\text{s}\}$

⁶ Os sinais dos componentes do vetor *bias* residual foram escolhidos arbitrariamente. Pôde-se verificar, por meio de simulações, que outras combinações de tais sinais não provocaram mudanças significativas nas acurácias das estimativas de atitude e de velocidade angular.

Os parâmetros κ das TUs e IUs do estimador AVUKF são ajustados de acordo com a regra $\kappa = 3 - n$, onde n é a dimensão do vetor de estado [para detalhes sobre a TU e a IU, vide seção 2.3].

O valor do tensor de inércia utilizado pelos estimadores AVEKF e AVUKF é,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6,508 & 0,008 & -0,008 \\ 0,008 & 6,492 & -0,008 \\ -0,008 & -0,008 & 8,008 \end{bmatrix} kg.m^2 \quad (5.24)$$

Os elementos de \mathbf{J} apresentam erros com magnitudes de 0,1% do elemento $J_{33}^v = 8 kg.m^2$ do tensor de inércia verdadeiro [dado no Apêndice D]. Sendo assim, em cada elemento de \mathbf{J} , há um erro absoluto de $0,008 kg.m^2$. Os sinais desses erros foram escolhidos de forma arbitrária. Pôde-se verificar, por meio de simulação, que outras combinações de tais sinais não provocaram mudanças significativas nas acurácias das estimativas de atitude e de velocidade angular.

Utilizando-se período de amostragem $T = 0,1 s$, obtêm-se para cada movimento 100 realizações dos erros de atitude, I_k [vide (3.66)], e de velocidade angular, F_k [vide (4.21)], a partir das quais são calculadas as médias, \bar{I}_k e \bar{F}_k , e os desvios-padrão, σ_k^I e σ_k^F , respectivamente. As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam os resultados obtidos para os movimentos lento, de *spin* e de *tumbling*, respectivamente. As curvas azuis consistem nas médias dos erros, \bar{I}_k e \bar{F}_k , enquanto que as curvas vermelhas representam as somas $\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I$ e $\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F$. Nota-se que não há diferenças significativas em termos de acurácia e taxa de convergência entre os estimadores AVEKF e AVUKF. Para todos os movimentos, os erros de estimação de atitude ficaram em torno de 1grau.

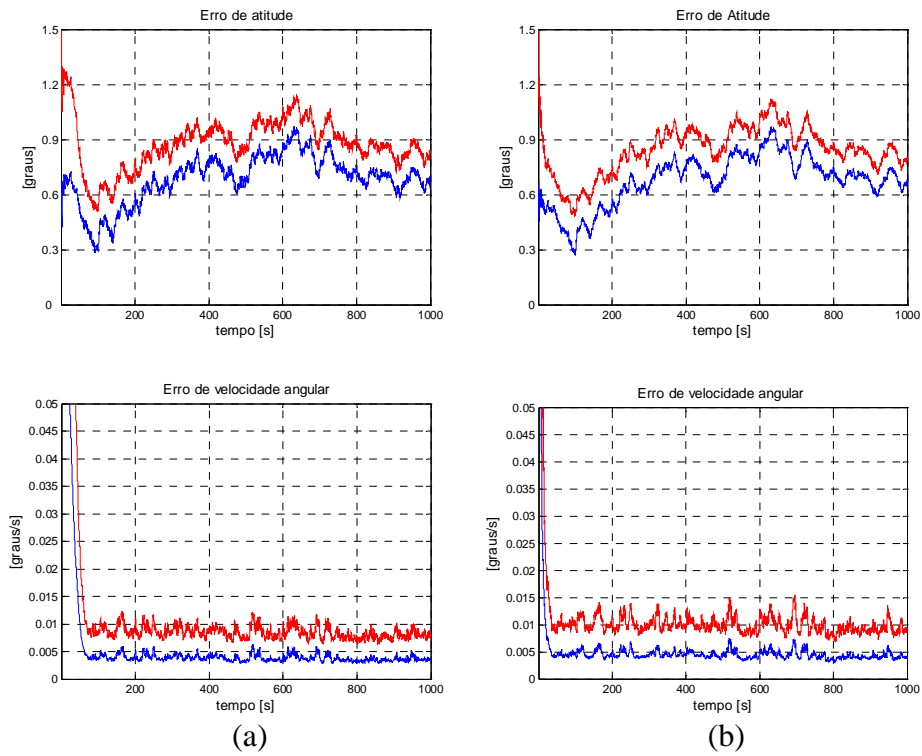


Figura 5.2 Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores (a) AVEKF e (b)

AVUKF – Movimento lento.

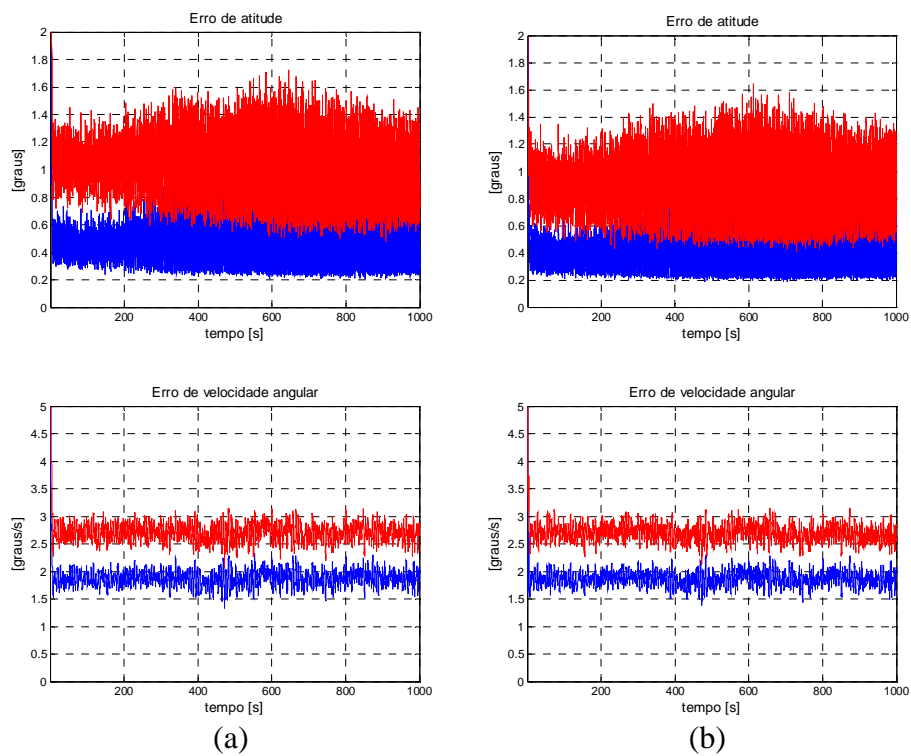


Figura 5.3 Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores (a) AVEKF e (b)

AVUKF – Movimento de *spin*.

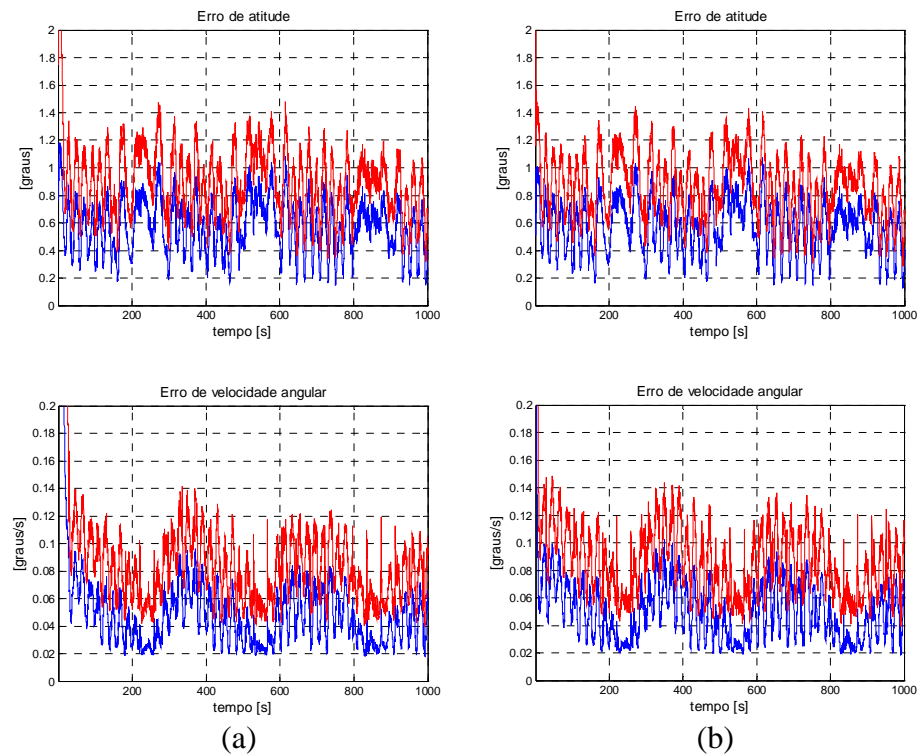


Figura 5.4 Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de *tumbling*.

As Tabelas 5.10 e 5.11 apresentam, respectivamente, os valores máximos de $\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I$ e de $\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F$ para $\forall t_k \in (100, 1000] s$, através dos quais se comparam as acurácias dos estimadores considerando-se diferentes magnitudes para o período de amostragem T . Observa-se a degradação de acurácia das estimativas de atitude e de velocidade angular à medida que se aumenta T . Novamente, não são verificadas diferenças significativas entre os resultados do AVEKF e os do AVUKF. Nota-se ainda que à medidas que se aumenta T , as estimativas do AVEKF se degradam ligeiramente mais rápido que as estimativas do AVUKF.

Tabela 5.10 Acurácia de estimação de atitude.

Movimento	Máximo $\{\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I\}$, para $\forall t_k \in (100, 1000] s$		
	AVEKF/AVUKF		
	$T = 0,1 s$	$T = 0,5 s$	$T = 1,0 s$
Lento	1,15 / 1,12	1,31 / 1,31	1,49 / 1,49
<i>Spin</i>	1,72 / 1,65	1,82 / 1,80	1,98 / 1,88
<i>Tumbling</i>	1,48 / 1,45	1,87 / 1,78	2,06 / 1,94

Tabela 5.11 Acurácia de estimação de velocidade angular.

Movimento	Máximo $\{\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F\}$, para $\forall t_k \in (100, 1000] s$ [graus/s]		
	AVEKF/AVUKF		
	$T = 0,1 s$	$T = 0,5 s$	$T = 1,0 s$
Lento	0,012 / 0,016	0,014 / 0,017	0,018 / 0,018
<i>Spin</i>	3,143 / 3,144	3,832 / 3,824	5,066 / 4,734
<i>Tumbling</i>	0,141 / 0,144	0,167 / 0,162	0,186 / 0,181

Avaliando-se as cargas computacionais dos estimadores de atitude e velocidade angular como nas subseções 3.3.3 e 4.3.3, constata-se que o tempo de execução do AVUKF é aproximadamente igual ao triplo do tempo de execução do AVEKF.

5.4.3 Estimação de atitude e velocidade angular – com eclipse

Os parâmetros orbitais utilizados nas simulações realizadas neste trabalho se referem à órbita nominal especificada para o satélite ITASAT. Trata-se de uma órbita circular baixa e quase-equatorial [vide Apêndice D], ao longo da qual o satélite passa por intervalos de eclipse com duração de aproximadamente 35% de seu período orbital. Durante esses intervalos, as medidas vetoriais do campo geomagnético são as únicas disponíveis ao SDA.

Realizaram-se testes dos estimadores AVEKF e AVUKF considerando-se uma janela de dados de 6000 s (~ 1 período orbital) iniciando-se às 20:00:00 (GMT) do dia 1º de Janeiro de 2008. Considera-se o intervalo de eclipse como sendo (1000, 3110) s⁷. O período de amostragem utilizado é $T = 0,1 s$. As Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostram os resultados de simulações de Monte Carlo com 10 realizações dos processos de estimação dos movimentos lento, de *spin* e de *tumbling*, respectivamente. Como anteriormente, as curvas azuis consistem nas médias dos erros, \bar{I}_k e \bar{F}_k , enquanto que as curvas vermelhas representam as somas $\bar{I}_k + 3 \times \sigma_k^I$ e $\bar{F}_k + 3 \times \sigma_k^F$.

⁷ O modelo para previsão de eclipses utilizado aqui é encontrado em Vallado (2004).

O *momentum* angular do satélite aumenta com sua velocidade angular. Uma grande magnitude do *momentum* angular implica numa grande rigidez giroscópica do satélite em relação aos torques de perturbação (Wiesel, 1997). Sendo assim, tal rigidez é menor no movimento *lento* e maior no movimento de *spin*, o que explica os resultados de estimação de velocidade angular nas figuras abaixo. Na Figura 5.6, observa-se a divergência das estimativas de velocidade angular do movimento *lento* durante o período de eclipse. Nota-se que as estimativas de velocidade angular dos movimentos de *spin* e de *tumbling* sofrem pequena degradação no eclipse. No caso do movimento de *spin*, tal degradação é imperceptível na Figura 5.7.

No movimento *lento*, o aumento do erro de estimação de velocidade angular causa a divergência das estimativas de atitude⁸, as quais assumem erros em torno de 25 graus ao final do período de eclipse. Embora esse erro inviabilize o controle de atitude do movimento *lento* durante o eclipse, nota-se que ele se reduz rapidamente quando medidas da direção do Sol voltam a se tornar disponíveis. Nesse caso, sugere-se que o satélite seja controlado em malha fechada somente durante a visibilidade do Sol.

⁸ Conforme o modelo em (5.1), a evolução temporal da atitude (quatérnio) depende da velocidade angular. Sendo assim, a divergência das estimativas de velocidade angular leva à divergência das estimativas de atitude.

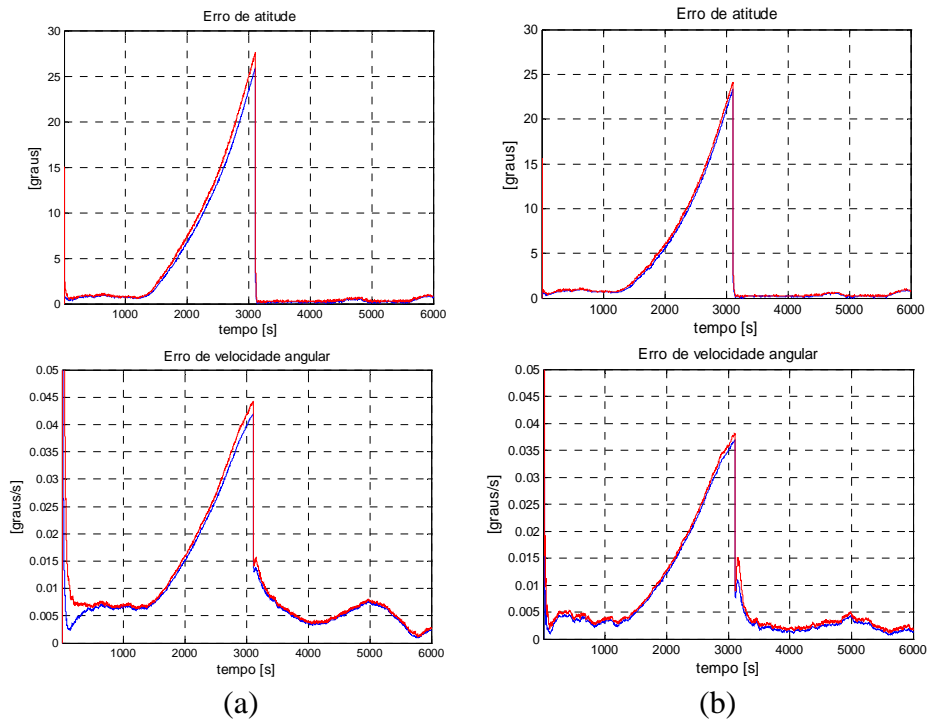


Figura 5.5 Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores durante 1 período de órbita (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento *lento*.

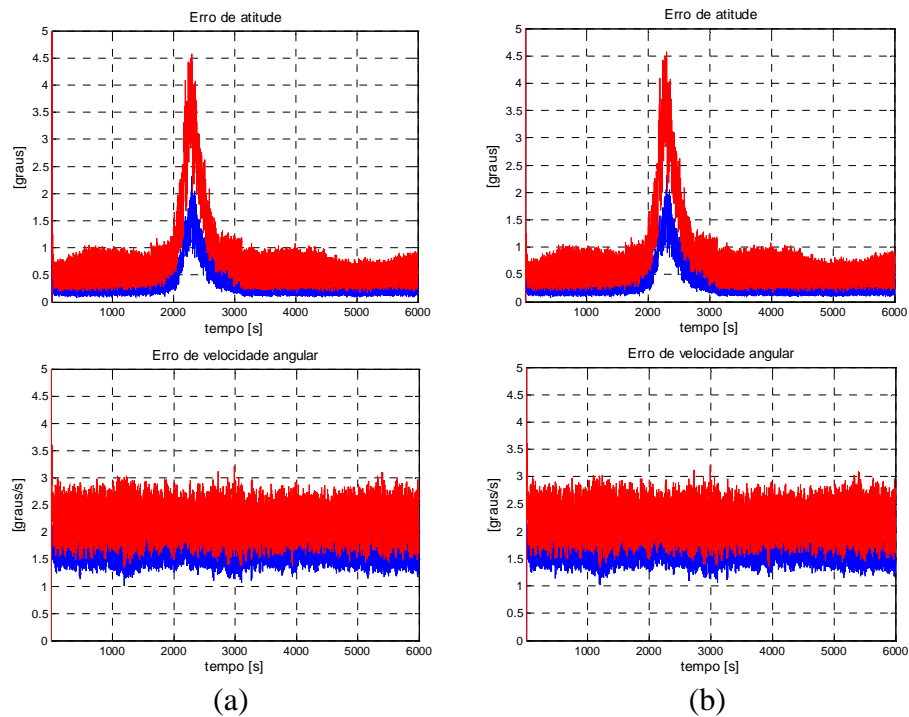


Figura 5.6 Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores durante 1 período de órbita (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de *spin*.

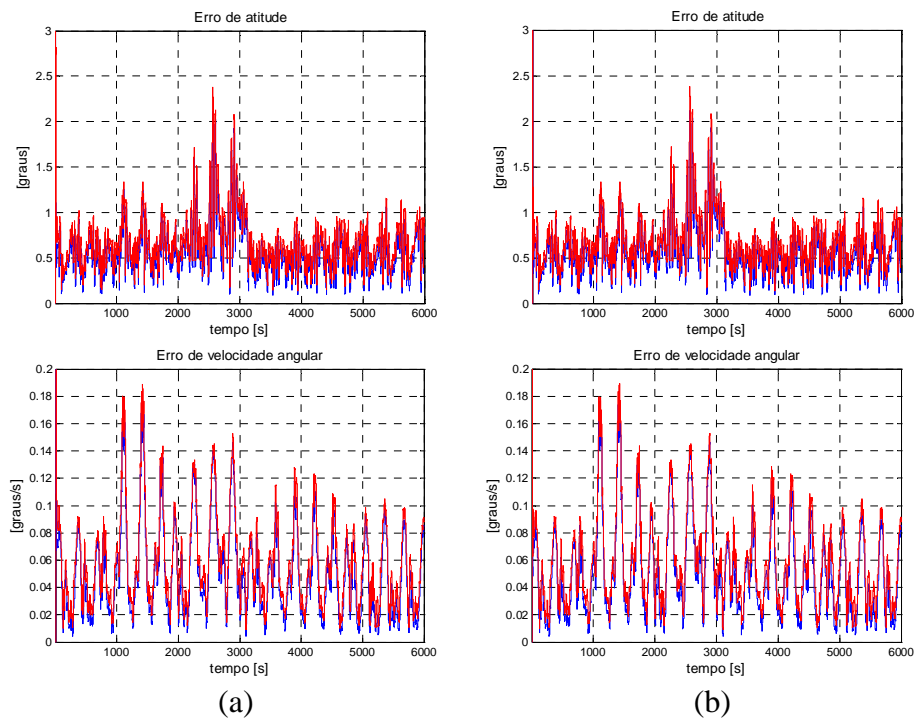


Figura 5.7 Erros de atitude e de velocidade angular dos estimadores durante 1 período de órbita (a) AVEKF e (b) AVUKF – Movimento de *tumbling*.

Na Figura 5.7, nota-se que o erro de estimação de atitude apresenta um pico em torno do instante $t = 2500$ s. Conforme Figura 5.9, em torno desse mesmo instante, os componentes da medida do campo geomagnético nos eixos X_B e Y_B apresentam magnitudes reduzidas e, sendo assim, os correspondentes erros de medição (compostos de *bias* e de distúrbios aleatórios no magnetômetro) são mais significativos nessa região. Logo, as estimativas de atitude em torno do eixo Z_B (obtidas a partir de informação contida nas medidas de campo nos eixos X_B e Y_B) se tornam tão ruins a ponto de causar o pico observado.

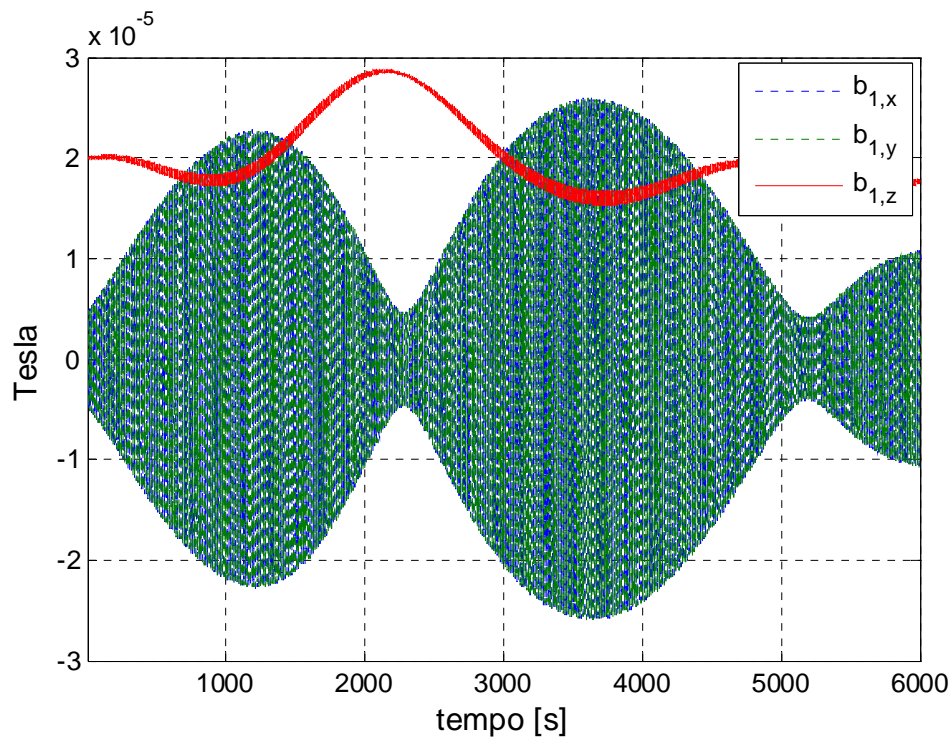


Figura 5.8 Medidas do campo geomagnético.

5.5 Comentários

Um SDA autônomo para aplicação em satélites que embarcam magnetômetro e sensores solares foi proposto neste capítulo. Esse sistema contém dois estimadores: um estimador de *bias* de magnetômetro e um estimador de atitude e velocidade angular. Foram apresentadas formulações de dois estimadores de *bias*, o MAGEKF e o MAGUKF, e de dois estimadores de atitude e velocidade angular, o AVEKF e o AVUKF. Esses estimadores foram avaliados a partir de simulações de Monte Carlo e os resultados obtidos revelaram a possibilidade de se estimar atitude e velocidade angular com acurácias que, embora sejam grosseiras, são compatíveis com os requisitos de várias missões de baixo custo (Azor *et al.*, 1998).

A determinação de atitude em 3 eixos por meio de métodos estáticos [vide classificação de métodos de estimação de atitude em 1.1.1] requer no mínimo dois pares de

medidas vetoriais, pois a atitude em torno do vetor correspondente é indeterminada se apenas um par estiver disponível. No entanto, utilizando-se métodos dinâmicos ⁹, é possível se estimar a atitude em 3 eixos a partir de um único par de medidas vetoriais adquirido a cada instante de amostragem, desde que o vetor correspondente varie suficientemente ao longo do tempo e as medidas vetoriais sejam suficientemente acuradas (Hall, 2003). Nas simulações realizadas, verificou-se a degradação de acurácia das estimativas de atitude e de velocidade angular durante um período de eclipse – período em que as medidas dos sensores solares não estão disponíveis. Em especial, as estimativas de atitude do movimento *lento* alcançaram erros de aproximadamente 25 graus.

Esses resultados indicam que, no plano da missão do ITASAT, a transição da fase operacional – em que o satélite é estabilizado por *spin* – para a fase experimental – em que o *spin* é removido e o controle se dá em 3 eixos – não deve envolver a atuação das bobinas de torque durante o eclipse por causa da grande incerteza na determinação da atitude que, por meio do controle em malha fechada, pode causar uma orientação do satélite que viole a restrição de ortogonalidade entre o eixo Z_B e a direção do Sol. Tal ocorrência pode ser fatal à segurança térmica do ITASAT. Esse resultado consiste numa contribuição original ao projeto do SCA-ITASAT e será considerado na elaboração dos modos de operação do ITASAT.

⁹ Nos métodos dinâmicos, a estimativa em cada instante é obtida fundindo-se informações contidas em medidas vetoriais adquiridas em instantes passados (e propagadas até o presente através de modelo dinâmico) às medidas atuais.

6 CONCLUSÃO

6.1 Conclusões gerais

Motivada pelo projeto do sistema de controle de atitude do ITASAT, esta dissertação tratou da estimação, utilizando filtro de Kalman estendido (EKF) e filtro de Kalman *unscented* (UKF), de atitude em 3 eixos e de velocidade angular de satélites a partir de medidas vetoriais do campo geomagnético e da direção do Sol.

No capítulo 3, diversos métodos de estimação de atitude que consideram a disponibilidade de medidas de velocidade angular foram comparados por meio de simulação. Por simplicidade, a incerteza nas medidas de velocidade angular foi modelada como sendo uma seqüência Gaussiana com média nula e covariância conhecida. Na prática, o uso de tais métodos em satélites que embarcam girômetros mecânicos requer o emprego de um modelo de medidas de velocidade angular mais sofisticado que considere a existência de erro de deriva, o qual se estima conjuntamente com os parâmetros de atitude (Lefferts *et al.*, 1982). Em se tratando de girômetros a fibra óptica, o erro de deriva é pouco significativo quando comparado ao ruído aleatório, fato que dispensa a estimação de deriva. Dentre os estimadores de atitude comparados, os estimadores de quatérnio de rotação, QEKF e QUKF, exibiram melhor desempenho em termos de acurácia, taxa de convergência e robustez a erros de inicialização.

Já no capítulo 4, tratou-se da estimação de velocidade angular independente de atitude. Como visto, esses métodos empregam um modelo de cinemática de medidas vetoriais simplificado, o qual consiste numa boa aproximação quando o satélite se move rapidamente em relação ao sistema de coordenadas de referência. Esses métodos podem, por exemplo, ser aplicados em controle de *detumbli*g e em satélites estabilizados por rotação (Psiaki e Oshman, 2003). Das duas abordagens de estimação de velocidade angular apresentadas, DA e EA, a primeira se diferencia da última pelo fato de utilizar derivadas numéricas das medidas

vetoriais. Observou-se que a abordagem EA, que não requer derivação de medidas, embora apresente maior carga computacional, produz estimativas mais acuradas. Em satélites estabilizados por rotação – por exemplo, a 40 *rpm*, que corresponde à rotação nominal da fase operacional do ITASAT – o período de amostragem deve ser muito pequeno para que os erros numéricos de derivação das medidas vetoriais não tenham magnitude excessivamente elevada. Tal fato dificulta o uso dos métodos DA nesses casos.

Por fim, no capítulo 5, sugeriu-se um Sistema de Determinação de Atitude (SDA) para uso em satélites de baixo custo. Esse sistema faz uso de estimadores de atitude e velocidade angular, AVEKF ou AVUKF, e de estimadores de *bias* de magnetômetro, MAGEKF ou MAGUKF. O AVEKF e o AVUKF foram formulados aumentando-se o estado dos estimadores de quatérnio, QEKF e QUKF, de forma a incluir o modelo dinâmico do satélite. O MAGEKF e o MAGUKF consistem em simplificações dos estimadores de parâmetros apresentados em Crassidis *et al.* (2005). Os estimadores do SDA proposto foram testados através de medidas vetoriais simuladas. As acurácias obtidas nas estimativas de atitude e de velocidade angular satisfazem os requisitos de missão do ITASAT e de muitas outras, típicas de satélites de baixo custo.

Classicamente, os sistemas de determinação de atitude de satélites se baseiam no EKF. O UKF, que consiste numa recente aproximação para a solução do problema de estimação de estado de sistemas não-lineares, vem se mostrando superior ao EKF em diversas aplicações, conforme relatado na literatura (Julier e Uhlmann, 2004). No entanto, conforme os resultados das investigações do presente trabalho, não há diferenças de desempenho significativas entre o EKF e o UKF em aplicações de estimação de atitude e velocidade angular de satélites. Observou-se também que o UKF apresenta carga computacional em torno de 3 vezes maior que a do correspondente EKF. Essa desvantagem do UKF poderá se tornar menos significativa à medida que novas tecnologias de processadores forem qualificadas para uso no

espaço. Por fim, destaca-se como vantagem significativa a facilidade para implementar estimadores UKF, pois, ao contrário dos EKF, eles não requerem matrizes Jacobianas, as quais podem exigir muito esforço para serem derivadas [vide Apêndice B].

6.2 Trabalhos futuros

Dentre os estudos que complementam as investigações realizadas nesta dissertação, podem-se citar os seguintes:

- Investigação do impacto do uso de outros sensores de atitude sobre o desempenho dos estimadores de atitude e de velocidade angular. Por exemplo, sensores de horizonte, que informam a direção do nadir, apresentam um custo relativamente baixo (Larson e Wertz, 1999), o que motiva a investigação do uso deles em SDAs com orçamentos reduzidos.
- Comparação entre os estimadores de velocidade angular dos tipos DA e EA considerando-se outros movimentos de atitude, como os movimentos *lento* e de *spin* empregados na avaliação realizada no capítulo 5. Conforme argumentado no capítulo 4, quanto menor a velocidade angular do satélite, pior é a qualidade do modelo de cinemática das medidas vetoriais adotado pelos estimadores de velocidade angular [vide (4.2)]. Devido a isso, suspeita-se que esses estimadores produzam resultados ruins para movimentos de atitude lentos.
- Investigação do desempenho dos estimadores de atitude, de velocidade angular e de *bias* de magnetômetro considerando-se diferentes inclinações de órbita que atendam aos requisitos de missão do ITASAT.
- Teste dos estimadores utilizando dados reais de satélites que embarcam sensores solares e magnetômetro, com taxa de amostragem e janela de tempo

que sejam adequados aos diversos modos de operação previstos para o ITASAT.

APÊNDICE A – PROPAGAÇÃO DE MÉDIAS E COVARIÂNCIAS

Tomando a esperança condicionada a $\mathbf{Z}_{1:k}$ em (2.1), obtém-se,

$$E[\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}] = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|\mathbf{Z}_{1:k}] + E[\mathbf{w}_k|\mathbf{Z}_{1:k}] \quad (\text{A.1})$$

onde a esperança $E[\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}]$ corresponde à estimativa predita e será denotada por $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$.

Por hipótese sobre $\{\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^n\}$, a esperança $E[\mathbf{w}_k|\mathbf{Z}_{1:k}]$ se anula, pois considera-se que \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k sejam estatisticamente independentes e que \mathbf{w}_k tem média nula. Dessa forma, resulta,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|\mathbf{Z}_{1:k}] \quad (\text{A.2})$$

que corresponde à equação (2.6). ■

A covariância de \mathbf{x}_{k+1} condicionada a $\mathbf{Z}_{1:k}$ é dada por,

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \text{cov}[\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}] \triangleq E \left[(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k} \right] \quad (\text{A.3})$$

a partir de onde, substituindo $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ por (A.2) e \mathbf{x}_{k+1} por (2.1), realizando os produtos e aplicando a aditividade do operador esperança, se obtém,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} = & \\ & E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}]' + \\ & E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)' | \mathbf{Z}_{1:k}] + E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{w}_k' | \mathbf{Z}_{1:k}] + E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k' | \mathbf{Z}_{1:k}] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O ruído de estado $\{\mathbf{w}_k \in \mathfrak{R}^n\}$ e o ruído de medidas $\{\mathbf{v}_k \in \mathfrak{R}^m\}$ são independentes (pois são Gaussianos e descorrelacionados) e, sendo assim, $E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k' | \mathbf{Z}_{1:k}] = E[\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k'] \equiv \mathbf{Q}_k$. Como as seqüências $\{\mathbf{x}_k\}$ e $\{\mathbf{w}_k\}$ são independentes, $E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{w}_k' | \mathbf{Z}_{1:k}] = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{w}_k | \mathbf{Z}_{1:k}]' = \mathbf{0}$. Logo, (A.4) resulta em,

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}]' + \mathbf{Q}_k \quad (\text{A.5})$$

que corresponde a (2.7). ■

Tomando a esperança condicionada a $\mathbf{Z}_{1:k}$ em (2.2), obtém-se,

$$E[\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}] = E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})|\mathbf{Z}_{1:k}] + E[\mathbf{v}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}] \quad (\text{A.6})$$

onde $E[\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}]$ corresponde à predição das medidas e será denotada por $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$. Sendo assim, como $\{\mathbf{v}_k\}$ tem média nula, segue que,

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})|\mathbf{Z}_{1:k}] \quad (\text{A.7})$$

que corresponde a (2.8). ■

A covariância de \mathbf{z}_{k+1} condicionada a $\mathbf{Z}_{1:k}$ é dada por,

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^z = cov[\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{Z}_{1:k}] \triangleq E \left[(\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} - \mathbf{z}_{k+1}) \cdot (\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} - \mathbf{z}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k} \right] \quad (\text{A.8})$$

e assim, substituindo $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$ por (A.7) e \mathbf{z}_{k+1} por (2.2), realizando os produtos e aplicando a aditividade do operador esperança, se obtém,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^z = & \\ & E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}]' + \\ & E[\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k}] + E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{v}_{k+1}' | \mathbf{Z}_{1:k}] + E[\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{v}_{k+1}' | \mathbf{Z}_{1:k}] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde,

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^z = E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}]' + \mathbf{R}_{k+1} \quad (\text{A.10})$$

que corresponde a (2.9). ■

A covariância cruzada de \mathbf{x}_{k+1} e \mathbf{z}_{k+1} condicionada a $\mathbf{Z}_{1:k}$ é dada por,

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{xz} = E \left[(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot (\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} - \mathbf{z}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k} \right] \quad (\text{A.11})$$

e assim, substituindo $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ por (A.2), \mathbf{x}_{k+1} por (2.1), $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$ por (A.7) e \mathbf{z}_{k+1} por (2.2), realizando os produtos e aplicando a aditividade do operador esperança, se obtém,

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{xz}} = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})' | \mathbf{Z}_{1:k}] - E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | \mathbf{Z}_{1:k}] \cdot E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{Z}_{1:k}]' \quad (\text{A.12})$$

que corresponde a (2.10). ■

APÊNDICE B – MATRIZES JACOBIANAS

No presente apêndice, são apresentadas as matrizes Jacobianas utilizadas nos estimadores do tipo EKF formulados nesta dissertação. A seguir, cada seção corresponde a um desses estimadores.

B.1 QEKF

Conforme (3.19), a matriz Jacobiana 3×4 referente à equação de medidas não-linear do QEKF é representada por,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^{\mathbf{q}} \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathbf{r}_{i,k+1} \in \mathfrak{R}^3$ é a medida vetorial i no sistema S_R e $\mathbf{D}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ é a DCM dada por (3.5). A matriz $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ pode ser separadamente derivada em relação aos componentes de \mathbf{q} , pois esses não têm relação com a medida vetorial $\mathbf{r}_{i,k+1}$. Sendo assim, as derivadas $\partial \mathbf{D} / \partial q_j$, para $j=1, \dots, 4$ são,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} 2q_1 & 2q_4 & -2q_3 \\ -2q_4 & 2q_1 & 2q_2 \\ 2q_3 & -2q_2 & 2q_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} 2q_2 & 2q_3 & 2q_4 \\ 2q_3 & -2q_2 & 2q_1 \\ 2q_4 & -2q_1 & -2q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} -2q_3 & 2q_2 & -2q_1 \\ 2q_2 & 2q_3 & 2q_4 \\ 2q_1 & 2q_4 & -2q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_4} = \begin{bmatrix} -2q_4 & 2q_1 & 2q_2 \\ -2q_1 & -2q_4 & 2q_3 \\ 2q_2 & 2q_3 & 2q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Logo, multiplicando-se as derivadas (B.2)-(B.5) pelo vetor $\mathbf{r}_{i,k+1}$ obtêm-se as colunas da Jacobiana (B.1), ou seja,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^q = \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_1} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_2} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_3} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial q_4} \mathbf{r}_{i,k+1} \right]_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.6})$$

B.2 EEKF

Conforme (3.28), a matriz Jacobiana 3×3 referente à equação de estado não-linear do EEKF é representada por,

$$\mathbf{F}^a(\hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}) \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}^a(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}(t)} \quad (\text{B.7})$$

onde $\hat{\mathbf{a}}(t) = [\hat{\psi} \quad \hat{\theta} \quad \hat{\phi}]'$ é o vetor cujos componentes consistem nas estimativas dos ângulos de Euler (3-2-1) no instante t , $\hat{\boldsymbol{\omega}} = [\hat{\omega}_x \quad \hat{\omega}_y \quad \hat{\omega}_z]'$ é a medida de velocidade angular e a função $\mathbf{f}^a(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})$ é dada em (3.24) e, explicitamente, é expressa por,

$$\mathbf{f}^a(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} (s\varphi/c\theta) \cdot \hat{\omega}_y + (c\varphi/c\theta) \cdot \hat{\omega}_z \\ c\varphi \cdot \hat{\omega}_y - s\varphi \cdot \hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_x + \text{tg } \theta \cdot s\varphi \cdot \hat{\omega}_y + \text{tg } \theta \cdot c\varphi \cdot \hat{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Sendo assim, derivado \mathbf{f}^a em relação a \mathbf{a} e computando o valor da expressão resultante em $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}(t)$ obtém-se a Jacobiana,

$$\mathbf{F}^a(\hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \begin{bmatrix} 0 & (s\hat{\theta} \cdot s\hat{\phi}/c^2\hat{\theta}) \cdot \hat{\omega}_y + (c\hat{\theta} \cdot s\hat{\phi}/c^2\hat{\theta}) \cdot \hat{\omega}_z & (c\hat{\phi}/c\hat{\theta}) \cdot \hat{\omega}_y - (s\hat{\phi}/c\hat{\theta}) \cdot \hat{\omega}_z \\ 0 & 0 & -s\hat{\phi} \cdot \hat{\omega}_y - c\hat{\phi} \cdot \hat{\omega}_z \\ 0 & (s\hat{\phi}/c^2\hat{\theta}) \cdot \hat{\omega}_y + (c\hat{\phi}/c^2\hat{\theta}) \cdot \hat{\omega}_z & \text{tg } \hat{\theta} \cdot c\hat{\phi} \cdot \hat{\omega}_y - \text{tg } \hat{\theta} \cdot s\hat{\phi} \cdot \hat{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Conforme (3.29), a matriz Jacobiana 3×3 referente à equação de medidas não-linear do EEKF é representada por,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^a \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}_{i,k+1}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.10})$$

Como em (B.1), a matriz $\mathbf{D}(\mathbf{a}) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, dada em (3.22), é derivada em relação aos componentes de \mathbf{a} , obtendo-se,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} -s\psi \cdot c\theta & c\psi \cdot c\theta & 0 \\ -s\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi - c\psi \cdot c\varphi & c\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi - c\psi \cdot c\varphi & 0 \\ -s\psi \cdot s\theta \cdot c\varphi + c\psi \cdot s\varphi & c\psi \cdot s\theta \cdot c\varphi + s\psi \cdot s\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -c\psi \cdot c\theta & -s\psi \cdot s\theta & -c\theta \\ c\psi \cdot c\theta \cdot s\varphi & s\psi \cdot c\theta \cdot s\varphi & -s\theta \cdot s\varphi \\ c\psi \cdot c\theta \cdot c\varphi & s\psi \cdot c\theta \cdot c\varphi & -s\theta \cdot s\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c\psi \cdot s\theta \cdot c\varphi + s\psi \cdot s\varphi & s\psi \cdot s\theta \cdot c\varphi - c\psi \cdot s\varphi & c\theta \cdot c\varphi \\ -c\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi + s\psi \cdot c\varphi & -s\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi - c\psi \cdot c\varphi & -c\theta \cdot s\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Logo, multiplicando-se as derivadas (B.11)-(B.13) pelo vetor $\mathbf{r}_{i,k+1}$, obtêm-se as colunas da Jacobiana (B.10), ou seja,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^a = \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \psi} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \varphi} \mathbf{r}_{i,k+1} \right]_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.14})$$

B.3 MEKF

Conforme (3.61), a matriz Jacobiana 3×3 referente à equação de estado não-linear do MEKF é representada por,

$$\mathbf{F}^m(\hat{\mathbf{m}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}) \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}^m(\mathbf{m}, \boldsymbol{\omega})}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\hat{\mathbf{m}}(t)} \quad (\text{B.15})$$

onde $\hat{\mathbf{m}}(t) = [\hat{m}_1 \quad \hat{m}_2 \quad \hat{m}_3]'$ é o vetor cujos componentes consistem nas estimativas dos MRP no instante t , $\hat{\boldsymbol{\omega}} = [\hat{\omega}_x \quad \hat{\omega}_y \quad \hat{\omega}_z]'$ é a medida de velocidade angular e a função $\mathbf{f}^m(\mathbf{m}, \boldsymbol{\omega})$ é dada em (3.55) e, explicitamente, é expressa por,

$$\mathbf{f}^m(\mathbf{m}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} (1 + m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) \cdot \hat{\omega}_x + 2 \cdot (m_1 \cdot m_2 - m_3) \cdot \hat{\omega}_y + 2 \cdot (m_1 \cdot m_3 + m_2) \cdot \hat{\omega}_z \\ 2 \cdot (m_1 \cdot m_2 + m_3) \cdot \hat{\omega}_x + (1 - m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) \cdot \hat{\omega}_y + 2 \cdot (m_2 \cdot m_3 - m_1) \cdot \hat{\omega}_z \\ 2 \cdot (m_1 \cdot m_3 - m_2) \cdot \hat{\omega}_x + 2 \cdot (m_2 \cdot m_3 + m_1) \cdot \hat{\omega}_y + (1 - m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) \cdot \hat{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Sendo assim, derivado \mathbf{f}^m em relação a \mathbf{m} e computando o valor da expressão resultante em

$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}}(t)$ obtém-se a Jacobiana,

$$\mathbf{F}^m(\hat{\mathbf{m}}(t), \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} [\hat{m}_1 \ \hat{m}_2 \ \hat{m}_3] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} & [-\hat{m}_2 \ \hat{m}_1 \ 1] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} & [-\hat{m}_3 \ -1 \ \hat{m}_1] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ [\hat{m}_2 \ -\hat{m}_1 \ -1] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} & [\hat{m}_1 \ \hat{m}_2 \ \hat{m}_3] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} & [1 \ -\hat{m}_3 \ \hat{m}_2] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ [\hat{m}_3 \ 1 \ -\hat{m}_1] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} & [-1 \ \hat{m}_3 \ -\hat{m}_2] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} & [\hat{m}_1 \ \hat{m}_2 \ \hat{m}_3] \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Conforme (3.62), a matriz Jacobiana 3×3 referente à equação de medidas não-linear do MEKF é representada por,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^m \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{m}) \cdot r_{i,k+1}}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\hat{\mathbf{m}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.18})$$

Como em (B.1), a matriz $\mathbf{D}(\mathbf{m}) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, dada em (3.53), é derivada em relação aos componentes de \mathbf{m} , obtendo-se,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_1} = \frac{\Sigma \cdot \left(16 \cdot [\mathbf{m} \times] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 4 \cdot (1 - \|\mathbf{m}\|^2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 8 \cdot m_1 \cdot [\mathbf{m} \times] \right) \cdot \Sigma \cdot \Lambda}{\Sigma^2} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_2} = \frac{\Sigma \cdot \left(16 \cdot [\mathbf{m} \times] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 4 \cdot (1 - \|\mathbf{m}\|^2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \cdot m_2 \cdot [\mathbf{m} \times] \right) \cdot \Sigma \cdot \Lambda}{\Sigma^2} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_3} = \frac{\Sigma \cdot \left(16 \cdot [\mathbf{m} \times] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 4 \cdot (1 - \|\mathbf{m}\|^2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \cdot m_3 \cdot [\mathbf{m} \times] \right) \cdot \Sigma \cdot \Lambda}{\Sigma^2} \quad (\text{B.21})$$

onde,

$$\Sigma \triangleq (1 + \|\mathbf{m}\|^2)^2 \quad (\text{B.22})$$

$$\Lambda \triangleq 4 \cdot m_1 \cdot (1 + \|\mathbf{m}\|^2) \quad (\text{B.23})$$

Logo, multiplicando-se as derivadas (B.19)-(B.21) pelo vetor $\mathbf{r}_{i,k+1}$, obtêm-se as colunas da Jacobiana (B.18), ou seja,

$$\mathbf{H}_{i,k+1}^m = \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_1} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_2} \mathbf{r}_{i,k+1} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial m_3} \mathbf{r}_{i,k+1} \right]_{\mathbf{m}=\hat{\mathbf{m}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.24})$$

B.4 DAEKF

Conforme (4.7), a matriz Jacobiana 3×3 referente à equação de estado não-linear do DAEKF é representada por,

$$\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}(t))}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\boldsymbol{\omega}=\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)} \quad (\text{B.25})$$

onde $\boldsymbol{\tau}(t)$ é o torque de controle, $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = [\hat{\omega}_x \ \hat{\omega}_y \ \hat{\omega}_z]'$ é a estimativa de velocidade angular e a função $\mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})$ é dada em (4.8) e, explicitamente, é expressa por,

$$\mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\mathcal{J}_{31} \cdot \omega_x \cdot \omega_y - \mathcal{J}_{32} \cdot \omega_y^2 + (\mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{33}) \cdot \omega_y \cdot \omega_z + \mathcal{J}_{21} \cdot \omega_x \cdot \omega_z + \mathcal{J}_{23} \cdot \omega_z^2 \\ \mathcal{J}_{31} \cdot \omega_x^2 + \mathcal{J}_{32} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + (\mathcal{J}_{33} - \mathcal{J}_{11}) \cdot \omega_x \cdot \omega_z - \mathcal{J}_{12} \cdot \omega_y \cdot \omega_z - \mathcal{J}_{13} \cdot \omega_z^2 \\ -\mathcal{J}_{21} \cdot \omega_x^2 + (\mathcal{J}_{11} - \mathcal{J}_{22}) \cdot \omega_x \cdot \omega_y - \mathcal{J}_{23} \cdot \omega_x \cdot \omega_z + \mathcal{J}_{12} \cdot \omega_y^2 + \mathcal{J}_{13} \cdot \omega_y \cdot \omega_z \end{bmatrix} + \mathcal{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.26})$$

onde \mathcal{J} é o tensor de inércia considerado constante.

Sendo assim, derivando \mathbf{f}^d em relação a $\boldsymbol{\omega}$ e computando o valor da expressão resultante em

$\boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$, obtém-se a Jacobiana,

$$\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) =$$

$$\mathcal{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\mathcal{J}_{31} \cdot \hat{\omega}_y + \mathcal{J}_{21} \cdot \hat{\omega}_z & -\mathcal{J}_{31} \cdot \hat{\omega}_x - 2 \cdot \mathcal{J}_{32} \cdot \hat{\omega}_y + (\mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{33}) \cdot \hat{\omega}_z & \dots \\ 2 \cdot \mathcal{J}_{31} \cdot \hat{\omega}_x + \mathcal{J}_{32} \cdot \hat{\omega}_y + (\mathcal{J}_{33} - \mathcal{J}_{11}) \cdot \hat{\omega}_z & \mathcal{J}_{32} \cdot \hat{\omega}_x - \mathcal{J}_{12} \cdot \hat{\omega}_z & \dots \\ -2 \cdot \mathcal{J}_{21} \cdot \hat{\omega}_x + (\mathcal{J}_{11} - \mathcal{J}_{22}) \cdot \hat{\omega}_y - \mathcal{J}_{23} \cdot \hat{\omega}_z & (\mathcal{J}_{11} - \mathcal{J}_{22}) \cdot \hat{\omega}_x + 2 \cdot \mathcal{J}_{12} \cdot \hat{\omega}_y + \mathcal{J}_{13} \cdot \hat{\omega}_z & \dots \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} (\mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{33}) \cdot \hat{\omega}_y + \mathcal{J}_{21} \cdot \hat{\omega}_x + 2 \cdot \mathcal{J}_{23} \cdot \hat{\omega}_z \\ (\mathcal{J}_{33} - \mathcal{J}_{11}) \cdot \hat{\omega}_x - \mathcal{J}_{12} \cdot \hat{\omega}_y - 2 \cdot \mathcal{J}_{13} \cdot \hat{\omega}_z \\ -\mathcal{J}_{23} \cdot \hat{\omega}_x + \mathcal{J}_{13} \cdot \hat{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Nota-se que $\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$ não depende do torque de controle $\boldsymbol{\tau}(t)$.

B.5 EAEKF

Conforme (4.18), a matriz Jacobiana 9×9 referente à equação de estado não-linear do EAEKF é representada por,

$$\mathbf{F}^e(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}(t))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (\text{B.27})$$

onde $\boldsymbol{\tau}(t)$ é o torque de controle, $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{\omega}_x \ \hat{\omega}_y \ \hat{\omega}_z \ \hat{b}_{1x} \ \hat{b}_{1y} \ \hat{b}_{1z} \ \hat{b}_{2x} \ \hat{b}_{2y} \ \hat{b}_{2z}]'$ é a estimativa do estado e a função $\mathbf{f}^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ é dada por,

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) \\ [\mathbf{b}_1 \times] \cdot \boldsymbol{\omega} \\ [\mathbf{b}_2 \times] \cdot \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

onde $\mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})$ é dada de forma explícita em (B.26) e,

$$[\mathbf{b}_i \times] \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -b_{iz} \cdot \omega_y + b_{iy} \cdot \omega_z \\ b_{iz} \cdot \omega_x - b_{ix} \cdot \omega_z \\ -b_{iy} \cdot \omega_x + b_{ix} \cdot \omega_y \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

para $i = 1, 2$.

Sendo assim, derivando \mathbf{f}^e em relação a $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}' \ \mathbf{b}'_1 \ \mathbf{b}'_2]'$ e computando o valor da expressão resultante em $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$, obtém-se a Jacobiana,

$$\mathbf{F}^e(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

onde $\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$ é dada em (B.27), $\mathbf{F}_3 = -[\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \times]$ e \mathbf{F}_i (para $i = 1, 2$) é obtida derivando (B.29) em relação a $\boldsymbol{\omega}$ e substituindo $\boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(t)$ na expressão resultante, ou seja,

$$\mathbf{F}_i = [\mathbf{b}_i \times] \quad (\text{B.31})$$

B.5 AVEKF

Conforme (5.9), a matriz Jacobiana 7×7 referente à equação de estado não-linear do AVEKF é representada por,

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}(t))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (\text{B.32})$$

onde $\boldsymbol{\tau}(t)$ é o torque de controle, $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{q}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{q}_3 \ \hat{q}_4 \ \hat{\omega}_x \ \hat{\omega}_y \ \hat{\omega}_z]'$ é a estimativa de atitude e velocidade angular e a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ é dada por (5.2) e, por comodidade, é repetida aqui,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

onde $\mathbf{f}^d(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})$ é dada em (B.26) e,

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega_x \cdot q_2 - \omega_y \cdot q_3 - \omega_z \cdot q_4 \\ \omega_x \cdot q_1 - \omega_y \cdot q_4 + \omega_z \cdot q_3 \\ \omega_x \cdot q_4 + \omega_y \cdot q_1 - \omega_z \cdot q_2 \\ -\omega_x \cdot q_3 + \omega_y \cdot q_2 + \omega_z \cdot q_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

onde $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$ é a matriz anti-simétrica dada por (5.3).

Sendo assim, derivando \mathbf{f} em relação a $\mathbf{x} = [\mathbf{q}' \ \boldsymbol{\omega}']'$ e computando o valor da expressão resultante em $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$, obtém-se a Jacobiana,

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t)) & \mathbf{F}^q \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t)) \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

onde $\mathbf{F}^d(\hat{\boldsymbol{\omega}}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$ é dada em (B.27) e \mathbf{F}^q é obtida derivando-se (B.34) em relação a $\boldsymbol{\omega}$ e substituindo-se $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(t)$ na expressão resultante, ou seja,

$$\mathbf{F}^q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & -\hat{q}_4 \\ \hat{q}_1 & -\hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ \hat{q}_4 & \hat{q}_1 & -\hat{q}_2 \\ -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

Conforme (5.10), a matriz Jacobiana 6×7 referente à equação de medidas não-linear do AVEKF é representada por,

$$\mathbf{H}_{k+1} \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.37})$$

onde $\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x})$ é dada em (5.6) e, por comodidade, é repetida aqui,

$$\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{1,k+1} \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_{2,k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

Derivando essa função em relação a \mathbf{x} e substituindo $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ na expressão resultante, obtém-se,

$$\mathbf{H}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^q & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{H}_{2,k+1}^q & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

onde $\mathbf{H}_{i,k+1}^q$ (para $i = 1, 2$) é dada por (B.6).

B.6 MAGEKF

Conforme (5.18), a matriz Jacobiana 1×3 referente à equação de medidas não-linear do MAGEKF é representada por,

$$\mathbf{H}_{k+1}^c \triangleq \left. \frac{\partial h_{k+1}^c(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}_{k+1|k}} \quad (\text{B.40})$$

onde $\mathbf{c} = [c_x \ c_y \ c_z]'$ e $h_{k+1}^c(\mathbf{c})$ é dada em (5.15) e, explicitamente, é expressa por,

$$h_{k+1}^c(\mathbf{c}) \triangleq 2 \cdot (\check{b}_{1x,k+1} \cdot c_x + \check{b}_{1y,k+1} \cdot c_y + \check{b}_{1z,k+1} \cdot c_z) - (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \quad (\text{B.41})$$

onde $\check{\mathbf{b}}'_{1,k+1} = [\check{b}_{1x,k+1} \ \check{b}_{1y,k+1} \ \check{b}_{1z,k+1}]'$ é vetor de medidas brutas de magnetômetro.

Derivando essa função em relação a \mathbf{c} e substituindo $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}_{k+1|k}$ na expressão resultante,

obtem-se,

$$\mathbf{H}_{k+1}^c = [2 \cdot (\check{b}_{1x,k+1} - c_{x,k+1|k}) \quad 2 \cdot (\check{b}_{1y,k+1} - c_{y,k+1|k}) \quad 2 \cdot (\check{b}_{1z,k+1} - c_{z,k+1|k})] \quad (\text{B.42})$$

que, expressa de forma vetorial, resulta,

$$\mathbf{H}_{k+1}^c = 2 \cdot (\check{\mathbf{b}}'_{1,k+1} - \hat{\mathbf{c}}'_{k+1|k}) \quad (\text{B.43})$$

APÊNDICE C – COVARIÂNCIA DOS RUÍDOS ALEATÓRIOS DAS MEDIDAS EMPREGADAS NOS ESTIMADORES DA

Neste apêndice, obtém-se a covariância do ruído aleatório, $\{\delta \mathbf{z}_{i,k}^d \in \mathfrak{R}^3\}$, das medidas empregadas nos estimadores de velocidade angular do tipo DA, as quais são computadas através de (4.5) utilizando as medidas vetoriais. Por motivo de clareza, repete-se em seguida a equação (4.5),

$$\mathbf{z}_{i,k+1}^d = \frac{1}{T} (\mathbf{b}_{i,k+1} - \mathbf{b}_{i,k}) \quad (\text{C.1})$$

Nessa equação, T é o período de amostragem e $\mathbf{b}_{i,k}$ é a medida vetorial i no instante t_k . No capítulo 4, considera-se o ruído aditivo de medidas vetoriais, $\{\delta \mathbf{b}_{i,k} \in \mathfrak{R}^3\}$, como sendo uma seqüência branca de média nula e auto-covariância conhecida, $\mathbf{cov}_{\delta \mathbf{b}_i}(k_1, k_2) = \mathbf{R}_{i,k_1} \cdot \delta_{k_1 k_2}$.

Seja $\bar{\mathbf{b}}_{i,k}$ o valor verdadeiro referente à medida vetorial $\mathbf{b}_{i,k}$. Substituindo $\mathbf{b}_{i,k} = \bar{\mathbf{b}}_{i,k} + \delta \mathbf{b}_{i,k}$ e $\mathbf{b}_{i,k+1} = \bar{\mathbf{b}}_{i,k+1} + \delta \mathbf{b}_{i,k+1}$ em (C.1), obtém-se,

$$\mathbf{z}_{i,k+1}^d = \bar{\mathbf{z}}_{i,k+1}^d + \delta \mathbf{z}_{i,k+1}^d \quad (\text{C.2})$$

onde,

$$\bar{\mathbf{z}}_{i,k+1}^d = \frac{1}{T} (\bar{\mathbf{b}}_{i,k+1} - \bar{\mathbf{b}}_{i,k}) \quad (\text{C.3})$$

$$\delta \mathbf{z}_{i,k+1}^d = \frac{1}{T} (\delta \mathbf{b}_{i,k+1} - \delta \mathbf{b}_{i,k}) \quad (\text{C.4})$$

O ruído $\{\delta \mathbf{z}_{i,k}^d \in \mathfrak{R}^3\}$ tem média nula e covariância,

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}_{\delta \mathbf{z}_i}(k_1, k_2) &= \mathbf{E}[\delta \mathbf{z}_{i,k_1}^d \cdot \delta \mathbf{z}_{i,k_2}^d{}'] \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{1}{T} (\delta \mathbf{b}_{i,k_1} - \delta \mathbf{b}_{i,k_1-1}) \cdot \frac{1}{T} (\delta \mathbf{b}_{i,k_2} - \delta \mathbf{b}_{i,k_2-1})'\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ \mathbf{E}[\delta \mathbf{b}_{i,k_1} \cdot \delta \mathbf{b}_{i,k_2}'] + \mathbf{E}[\delta \mathbf{b}_{i,k_1-1} \cdot \delta \mathbf{b}_{i,k_2-1}'] - \mathbf{E}[\delta \mathbf{b}_{i,k_1} \cdot \delta \mathbf{b}_{i,k_2-1}'] - \mathbf{E}[\delta \mathbf{b}_{i,k_1-1} \cdot \delta \mathbf{b}_{i,k_2}'] \} / T^2 \\
&= \{ \mathbf{cov}_{\delta \mathbf{b}_i}(k_1, k_2) + \mathbf{cov}_{\delta \mathbf{b}_i}(k_1 - 1, k_2 - 1) - \mathbf{cov}_{\delta \mathbf{b}_i}(k_1, k_2 - 1) - \mathbf{cov}_{\delta \mathbf{b}_i}(k_1 - 1, k_2) \} / T^2 \\
&= \{ \mathbf{R}_{i,k_1} \cdot \delta_{k_1 k_2} + \mathbf{R}_{i,k_1-1} \cdot \delta_{(k_1-1)(k_2-1)} - \mathbf{R}_{i,k_1} \cdot \delta_{k_1(k_2-1)} - \mathbf{R}_{i,k_1-1} \cdot \delta_{(k_1-1)k_2} \} / T^2 \\
&= \begin{cases} \{ \mathbf{R}_{i,k_1} + \mathbf{R}_{i,k_1-1} \} / T^2 & , \text{ se } k_2 = k_1 \\ - \mathbf{R}_{i,k_1} / T^2 & , \text{ se } k_2 = k_1 + 1 \\ - \mathbf{R}_{i,k_1-1} / T^2 & , \text{ se } k_2 = k_1 - 1 \\ \mathbf{0} & , \text{ nos outros casos} \end{cases} \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{cov}_{\delta \mathbf{z}_i}(k_1, k_2)$ assume valores não-nulos quando $|k_1 - k_2| = 1$, então $\{\delta \mathbf{z}_{i,k}^d \in \mathfrak{R}^3\}$ não é uma seqüência branca. Nota-se que esse ruído tem sua intensidade aumentada à medida que se reduz o período de amostragem.

APÊNDICE D – SIMULAÇÃO DE ATITUDE

Este apêndice descreve a obtenção de dados sintéticos utilizados em testes de estimadores nos capítulos 3, 4 e 5. O sistema de coordenadas Cartesianas (SCC) de referência (S_R) adotado é o ECI (*Earth Centered Inertial*) (Wertz, 1978), que têm o eixo X_R apontando na direção do Equinócio Vernal, o eixo Z_R na direção do eixo de rotação da Terra e o eixo Y_R completando um sistema dextrógiro. Quanto ao SCC do corpo (S_B), considera-se um sistema alinhado com os *eixos principais de inércia* do satélite (X_B , Y_B e Z_B).

Movimento verdadeiro

O movimento de translação simulado se dá ao longo de uma órbita Kepleriana cujos elementos orbitais são apresentados na Tabela D.1. Esses parâmetros correspondem à órbita nominal especificada para o satélite ITASAT.

Tabela D.1 Elementos orbitais do movimento verdadeiro ¹.

Semi-eixo maior	Excentricidade	Inclinação	ARNA	Argumento do perigeu	Tempo de passagem pelo perigeu
a	e	i	Ω	ω	T_o
7128 km	0.001	25°	-40°	12°	0

A Figura D.1 mostra um *diagrama de blocos* referente à simulação das equações de movimento de atitude. Conforme ilustrado, a equação de cinemática utiliza parametrização de atitude por quatérnio de rotação. A equação de dinâmica se refere a um satélite rígido com tensor de inércia (verdadeiro) representado em S_B por $\mathbf{J}^v = \text{diag}(6,5 \ 6,5 \ 8,0) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Por simplicidade, não está sendo considerado o torque de controle, o que não implica em perda de generalidade. O torque de perturbação, $\boldsymbol{\tau}_p$, consiste na soma de 3 componentes: 1) torque de

¹ O elemento descrito por ARNA se refere à *ascensão reta do nó ascendente*.

gradiente gravitacional; 2) torque magnético causado por um momento de dipolo residual de $\mathbf{m} = [0,1 \ 0,1 \ 0,1]' \text{ A.m}^2$; e 3) ruído Gaussiano com média nula e covariância $(1 \times 10^{-12}) \cdot \mathbf{I}_3 \text{ (N.m)}^2$. Modelos para torque de gradiente gravitacional e torque magnético são encontrados em Wertz (1978). As equações de movimento de atitude são integradas usando o método Runge-Kutta de ordem 4 com passo de integração fixo de 0,001 s.

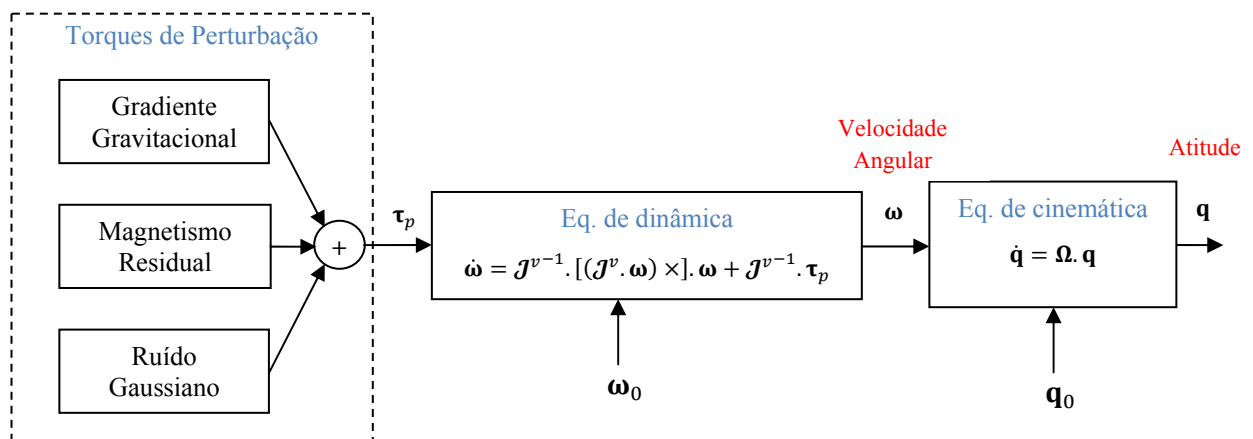


Figura D.1 Diagrama de blocos da simulação do movimento de atitude.

Medidas do campo geomagnético

O vetor indução magnética referente ao campo geomagnético numa determinada posição na órbita do satélite e no correspondente instante de tempo é simulado em S_R utilizando-se o modelo WMM2005 (McLean *et al.*, 2004) e conversões requeridas entre sistemas de coordenadas [para detalhes sobre conversões de coordenadas, vide Vallado (2004)]. Por simplicidade, esse vetor será freqüentemente referido como *campo geomagnético*. Conforme ilustra a Figura D.2, a soma do campo geomagnético representado em S_B , $\bar{\mathbf{b}}_{1,k}$, com o termo de distúrbio $\delta \mathbf{b}_{1,k}$ resulta nas *medidas de campo geomagnético* simuladas, $\mathbf{b}_{1,k}$. Modelos para o termo de distúrbio são especificados nos capítulos 3, 4 e 5.

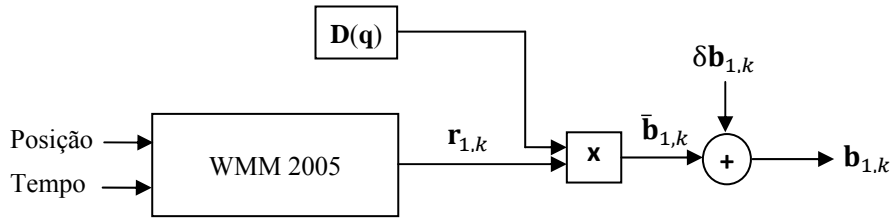


Figura D.2 Diagrama de blocos da simulação das medidas de campo geomagnético.

Medidas da direção do Sol

A direção do Sol é simulada através de um modelo algébrico aproximado [dado em Wertz (1978), p. 141]. Esse modelo fornece a representação em S_R do vetor unitário, $\hat{\mathbf{S}}$, ao longo da linha que une o satélite ao centro do Sol. Esta representação, denotada por $\mathbf{r}_{2,k}$, formada por esses componentes no instante t_k , quando transformada para S_B , resulta em $\bar{\mathbf{b}}_{2,k}$, que se relaciona com os ângulos $\bar{\phi}_{s,k}$ e $\bar{\theta}_{s,k}$ (ilustrados na Figura D.3) por ²,

$$\bar{\mathbf{b}}_{2,k} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\phi}_{s,k}) \cdot \text{sen}(\bar{\theta}_{s,k}) \\ \cos(\bar{\phi}_{s,k}) \cdot \cos(\bar{\theta}_{s,k}) \\ \text{sen}(\bar{\phi}_{s,k}) \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

ou, de forma inversa, por ³,

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_{s,k} \\ \bar{\theta}_{s,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{asen}(\bar{b}_{2,3}(k)) \\ \text{atan}(\bar{b}_{2,1}(k)/\bar{b}_{2,2}(k)) \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

² O sensor solar de 2 eixos fabricado pela Surrey Satellite Technology (SSTL, 2008) fornece medidas de ângulos de azimute e de elevação como os ilustrados na Figura D.3.

³ $\bar{\mathbf{b}}_{2,k} = [\bar{b}_{2,1}(k) \ \bar{b}_{2,2}(k) \ \bar{b}_{2,3}(k)]'$

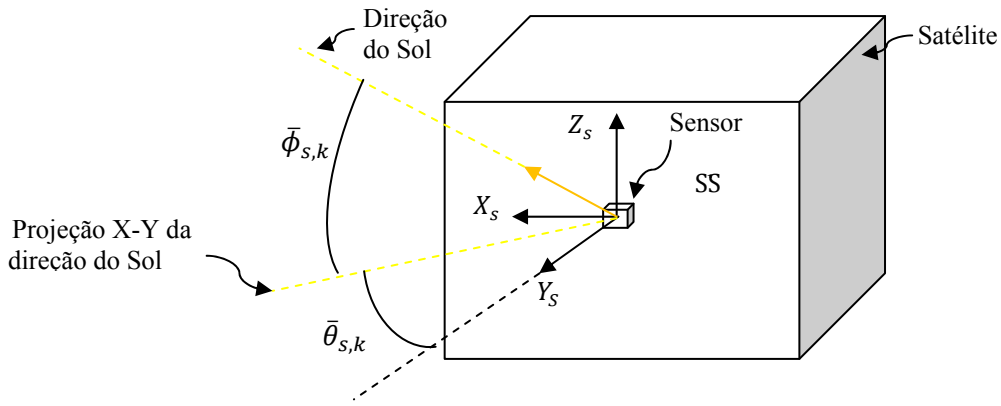


Figura D.3 Ângulos medidos pelo sensor solar.

As medidas da direção do Sol, conforme ilustrado na Figura D.4, correspondem aos ângulos de azimute, $\bar{\theta}_{s,k}$, e de elevação, $\bar{\phi}_{s,k}$. Modelos para o distúrbio de medida $[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]'$ são especificados nos capítulos 3, 4 e 5.

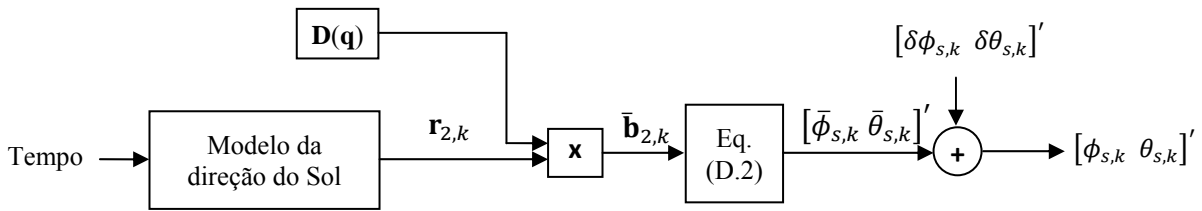


Figura D.4 Diagrama de blocos da simulação das medidas da direção do Sol.

Os estimadores estudados neste trabalho requerem, ao invés dos ângulos medidos, o vetor direção do Sol em S_B , $\mathbf{b}_{2,k}$, obtido através de (D.1) substituindo-se $[\bar{\phi}_{s,k} \ \bar{\theta}_{s,k}]'$ por $[\phi_{s,k} \ \theta_{s,k}]'$. O correspondente termo de distúrbio, $\delta\mathbf{b}_{2,k}$, se relaciona de forma aproximada com $[\delta\phi_{s,k} \ \delta\theta_{s,k}]'$ através de,

$$\delta\mathbf{b}_{2,k} \cong \mathbf{\Pi}_k \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi_{s,k} \\ \delta\theta_{s,k} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

onde,

$$\mathbf{\Pi}_k = \begin{bmatrix} -\sin(\phi_{s,k}) \cdot \sin(\theta_{s,k}) & \cos(\phi_{s,k}) \cdot \cos(\theta_{s,k}) \\ -\sin(\phi_{s,k}) \cdot \cos(\theta_{s,k}) & -\cos(\phi_{s,k}) \cdot \sin(\theta_{s,k}) \\ \cos(\phi_{s,k}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Prova. Utilizando (D.1), obtém-se a medida com distúrbio, $\mathbf{b}_{2,k}$, a partir de $\phi_{s,k}$ e $\theta_{s,k}$, ou seja,

$$\mathbf{b}_{2,k} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_{s,k}) \cdot \sin(\theta_{s,k}) \\ \cos(\phi_{s,k}) \cdot \cos(\theta_{s,k}) \\ \sin(\phi_{s,k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\phi}_{s,k} + \delta\phi_{s,k}) \cdot \sin(\bar{\theta}_{s,k} + \delta\theta_{s,k}) \\ \cos(\bar{\phi}_{s,k} + \delta\phi_{s,k}) \cdot \cos(\bar{\theta}_{s,k} + \delta\theta_{s,k}) \\ \sin(\bar{\phi}_{s,k} + \delta\phi_{s,k}) \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Usando as identidades trigonométricas,

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

e considerando $\delta\phi_{s,k}$ e $\delta\theta_{s,k}$ pequenos o suficiente para que seus produtos sejam negligenciados e as aproximações $\sin(\delta\phi_{s,k}) \cong \delta\phi_{s,k}$, $\sin(\delta\theta_{s,k}) \cong \delta\theta_{s,k}$, $\cos(\delta\phi_{s,k}) \cong 1$ e $\cos(\delta\theta_{s,k}) \cong 1$ possam ser adotadas, então (D.5) é aproximada por,

$$\mathbf{b}_{2,k} \cong \bar{\mathbf{b}}_{2,k} + \delta\mathbf{b}_{2,k} \quad (\text{D.6})$$

onde $\bar{\mathbf{b}}_{2,k}$ é dado por (D.1) e,

$$\delta\mathbf{b}_{2,k} = \bar{\mathbf{\Pi}}_k \cdot \begin{bmatrix} \delta\phi_{s,k} \\ \delta\theta_{s,k} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

onde $\bar{\mathbf{\Pi}}_k$ é obtida de (D.4) substituindo-se $\phi_{s,k}$ e $\theta_{s,k}$ por $\bar{\phi}_{s,k}$ e $\bar{\theta}_{s,k}$, respectivamente. No entanto, como os ângulos verdadeiros, $\bar{\phi}_{s,k}$ e $\bar{\theta}_{s,k}$, são desconhecidos, utilizando-se os ângulos medidos, $\phi_{s,k}$ e $\theta_{s,k}$, em seus lugares, obtém-se a aproximação dada em (D.3). \square

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALONSO, R.; SHUSTER, M. D. TWOSTEP: A Fast Robust Algorithm for Attitude-Independent Magnetometer Bias Determination. **The Journal of the Astronautical Sciences**, Vol. 50, No. 4, 2002a, pp. 433-451.

ALONSO, R.; SHUSTER, M. D. Complete Linear Attitude-Independent Magnetometer Calibration. **The Journal of the Astronautical Sciences**, Vol. 50, No. 4, 2002b, pp. 477-490.

ARULAMPALAM, M. S.; MASKELL, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. **IEEE Transactions on Signal Processing**, Vol. 50, No. 2, 2002, pp. 174-185.

AZOR, R.; BAR-ITZHACK, I. Y.; DEUTSCHMANN, J. K.; HARMAN, R. R. Angular-Rate Estimation Using Delayed Quaternion Measurements. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 24, No. 3, 2001, pp. 436-443.

AZOR, R.; BAR-ITZHACK, I. Y.; HARMAN, R. R. Satellite Angular Rate Estimation from Vector Measurements. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 21, No. 3, 1998, pp. 450-457.

BAK, T. **Spacecraft Attitude Determination – A Magnetometer Approach**. 1999. Tese de doutorado – Aalborg University, Aalborg.

BAK, T.; WISNIEWSKI, R.; BLANKE, M. Autonomous Attitude Determination and Control System for the Orsted Satellite. **IEEE Proceedings on Aerospace Applications Conference**, Vol. 2, 1996, pp. 173-186.

BAR-ITZHACK, I.Y.; COHEN Y. Geometry Based Euler-Vector and Quaternion Recursive-Estimators. **AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit**, Aug. 2005, San Francisco, California.

BAR-ITZHACK, I. Y. Classification of Algorithms for Angular Velocity Estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 24, No. 2, 2001, pp. 214-218.

BAR-ITZHACK, I. Y. REQUEST – A Recursive QUEST Algorithm for Sequential Attitude Determination. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 19, No. 5, 1996, pp. 1034-1038.

BAR-ITZHACK, I.Y.; IDAN, M. Recursive Attitude Determination from Vector Observations: Euler Angle Estimation. **Journal of Guidance**, Vol. 10, No. 2, 1987, pp. 152-157.

BAR-ITZHACK, I. Y.; OSHMAN, Y. Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, Vol. AES-21, No. 1, 1985, pp. 128-135.

BAR-ITZHACK, I. Y.; REINER, J. Recursive Attitude Determination from Vector Observations: Direction Cosine Matrix Identification. **Journal of Guidance**, Vol. 7, No. 1, 1984, pp. 51-56.

BAR-ITZHACK, I. Y.; MEYER, J. On the Convergence of Iterative Orthogonalization Processes. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, Vol. AES-12, 1976, pp. 146-151.

BAR-SHALOM, Y.; LI, X.-R. **Estimation and Tracking – Principles, Techniques and Software**. Norwood: Artech House, 1993.

- CHALLA, M.; KOTARU, S.; NATANSON, G. Magnetometer-Only Attitude and Rate Estimates During the Earth Radiation Budget Satellite 1987 Control Anomaly. **AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference**, New Orleans, LA, Aug. 11-13, 1997.
- CHALLA, M.; NATANSON, G.; WHEELER, C. Simultaneous Determination of Spacecraft Attitude and Rates Using Only a Magnetometer. **AIAA/AAS Astrodynamics Conference**, San Diego, CA, July 29-31, 1996.
- CHOUKROUN, D. **Novel Methods for Attitude Determination Using Vector Observations**. 2003. Tese de doutorado – Technion Israel Institute of Technology, Haifa.
- CHOUKROUN, D.; OSHMAN, Y.; BAR-ITZHACK, I. Y. A Novel Quaternion Kalman Filter. **Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference**, Monterey, CA, Aug., 2002.
- CHOUKROUN, D.; OSHMAN, Y.; BAR-ITZHACK, I. Y. Optimal-REQUEST Algorithm for Attitude Determination. **Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference**, Montreal, Quebec, Aug., 2001.
- CRASSIDIS, J. L.; LAI, K.-L.; HARMAN, R. R. Real-Time Attitude-Independent Three-Axis Magnetometer Calibration. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 28, No. 1, 2005, pp. 115-120.
- CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L. Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 26, No. 4, 2003, pp. 536-542.
- CRASSIDIS, J. L.; MARKLEY, F. L. Attitude Estimation Using Modified Rodrigues Parameters. **Proceedings of the Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium**, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, 1996, pp. 71-83.

- FARRELL, J. L. Attitude Determination by Kalman Filtering. **Automatica**, Vol. 6, No. 5, 1970, pp. 419-430.
- GELB, A. (ed.). **Applied Optimal Estimation**. Cambridge: MIT Press, 1974.
- HALL, C. D. **Spacecraft Dynamics and Control**. 2003. Virginia Tech.
- HARMAN, R. R.; BAR-ITZHACK, I. Y. Pseudolinear and State-Dependent Riccati Equation Filters for Angular Rate Estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 22, No. 5, 1999, pp. 723-725.
- HOOTS, F. R.; ROEHRICH, R. L. **Spacetrack Report no. 3 – Models for Propagation of NORAD Element Sets**. Aerospace Defense Center, 1980.
- HOTH, Y. **User's Manual: Magnetometer**. IAI TAMAM. Ref.: μ ST-MU-S-4-823-IAI. 2000.
- JAZWINSKI, A. H. **Stochastic Processes and Filtering Theory**. New York: Academic, 1970.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K.; DURRANT-WHYTE, H. F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Vol. 45, No. 3, 2000, pp. 477-482.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. **Proceedings of the IEEE**, Vol. 92, No. 3, 2004, pp. 401-421.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. **Proc. AeroSense: 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls**, 1997, pp. 182-193.
- KAPLAN, M. H. **Modern Spacecraft Dynamics and Control**. John Wiley & Son, 1976.

- KROGH, K. **Attitude Determination for AAU CubeSat**. 2002. Dissertação de mestrado – Aalborg University, Aalborg.
- KUGA, H. K.; LOPES, R. V. F.; EINWOEGERER, W. Experimental Static Calibration of an IMU (Inertial Measurement Unit) based on MEMS. **International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)**, Nov. 2007, Brasília, DF.
- LARSON, W. J.; WERTZ, J. R. (eds). **Space Mission Analysis and Design**. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 417-429.
- LI, H.; SUN, Z.-w.; ZHANG, S.-j. Satellite Attitude Estimation UKF Algorithm Based on Star-Sensor. **IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications**, Oct. 2006, Beijing, China.
- MARKLEY, F. L. Attitude Error Representations for Kalman Filtering. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 26, No. 2, 2003, pp. 311-317.
- MARKLEY, L. F.; MORTARI, D. How to Compute Attitude from Vector Observations. **AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference**, Girdwood, AK, August 15-19, 1999.
- MARKLEY, F. L. Attitude Determination Using Vector Observations: Theory. **Journal of the Astronautical Sciences**, Vol. 37, No. 1, January-March 1989, pp. 41–58.
- MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation, and Control, Volume 2**. New York: Academic Press, 1982.

MCLEAN, S. S.; MACMILLAN, S.; MAUS, V.; LESUR, A.; THOMSON, D.; DATER, D. **The US/UK World Magnetic Model for 2005-2010**. NOAA Technical Report NESDIS/NGDC-1, 2004.

MENDEL, J. M. **Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications, and Control**. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, N. J., 1995.

MOHAMMED, A. M. S.; BENYETTOU, M.; SWEETING, M. N.; COOKSLEY, J. R. Full Attitude Determination Specification – Small Libration Version – of the Alsat-1 First Algerian Microsatellite in Orbit. **Proceedings of the 2nd International Conference on Recent Advances in Space Technologies**, 2005, pp. 150-154.

SSTL, 2-axis sun sensor:

http://www.sstl.co.uk/documents/2axis_digital_sun_sensor_datasheet_2007.pdf.

Arquivo consultado em 2008.

OSHMAN, Y.; MARKLEY, F. L. Sequential Attitude and Attitude-Rate Estimation Using Integrated-Rate Parameters. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 22, No. 3, 1999, pp. 385-394.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. McGraw-Hill Education, 4th ed., 2001.

PEEBLES, P. Z. **Probability, Random Variables and Random Signal Principles**. McGraw-Hill, 2nd ed., 1987.

PITTELKAU, M. E. Rotation Vector in Attitude Estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 26, No. 6, 2003, pp. 455-460.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.

PSIAKI, M. L. Attitude Determination Filtering via Extended Quaternion Estimation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 23, No. 2, 2000, pp. 206-214.

PSIAKI, M. L.; OSHMAN, Y. Spacecraft Attitude Rate Estimation from Geomagnetic Field Measurements. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 26, No. 2, 2003, pp. 244-252.

SANTOS, D. A.; WALDMANN, J. Attitude and Angular Rate Estimation for a Low-Cost Satellite. **International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)**, Nov. 2007a, Brasília, DF.

SANTOS, D. A.; WALDMANN, J. Attitude and Angular Velocity Estimation Using Unscented Kalman Filter. **V Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial (SBEIN)**, Nov. 2007b, Rio de Janeiro, RJ.

SANTOS, D. A.; WALDMANN, J. Minimum Variance Satellite Attitude Estimation Using Different Parameterizations. **V Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial (SBEIN)**, Nov. 2007c, Rio de Janeiro, RJ.

SARKKA, S. On Unscented Kalman Filtering for State Estimation of Continuous-Time Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Vol. 52, No. 9, 2007, pp. 1631-1641.

SARKKA, S. **Recursive Bayesian Inference on Stochastic Differential Equations**. 2006. Tese de doutorado – Helsinki University of Technology, Espoo.

SARTVEIT, K. **Attitude determination of the NCUBE satellite**. 2003. Dissertação de mestrado – NTNU, Trondheim.

SCHAUB, H. **Novel Coordinates for Nonlinear Multibody Motion with Applications to Spacecraft Dynamics and Control**. 1998. Tese de doutorado – Texas A&M University.

SEKHAVAT, P.; GONG, Q.; ROSS, I. M. NAPSAT1 Parameter Estimation Using Unscented Kalman Filtering. **Proceedings of the 2007 American Control Conference**, NY, USA, 2007.

SHINNERS, S. M. **Modern Control Theory and Design**, 2^a ed., Wiley, 1998.

SHORSHI, G.; BAR-ITZHACK, I. Y. Satellite Autonomous Navigation Based on Magnetic Field Measurements. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 18, No. 4, 1995, pp. 843-850.

SHORSHI, G. **Satellite Autonomous Navigation Based on Magnetic Field Measurements**. 1992. Dissertação de mestrado – Technion Israel Institute of Technology, Haifa (em hebraico).

SHUSTER, M. D. A Survey of Attitude Representations. **Journal of the Astronautical Sciences**, Vol. 41, No. 4, 1993, pp. 439-517.

SHUSTER, M. D.; OH, S. D. Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations. **Journal of Guidance and Control**, Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 70-77.

SMITH, C. E. **Applied Mechanics: Dynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1982.

STUELPNAGEL, J. On the Parameterization of the Three-Dimensional Rotation Group. **SIAM Reviews**, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 422-430.

VALLADO, D. A. **Fundamentals of Astrodynamics and Applications**. Space Technology Library, 2nd ed., 2004.

VANDYKE, M. C.; SCHWARTZ, J. L.; HALL C. D. Unscented Kalman Filtering for Spacecraft Attitude State and Parameter Estimation. **AIAA Space Flight Mechanics Conference**, 2004.

WAHBA, G. A Least-Squares Estimate of Satellite Attitude. **SIAM Reviews**, Vol. 7, No. 3, 1965, p. 409.

WALDMANN, J. Attitude Determination Algorithms, Computational Complexity, and the Accuracy of Terrestrial Navigation with Strapdown Inertial Sensors. **Congresso Brasileiro de Automática (CBA)**, 2002.

WAN, E. A.; MERWE, R. V.-d. **Kalman filtering and Neural Networks**, ch. 7: “The Unscented Kalman Filter”, Wiley, 2001.

WERTZ, J. (ed.) **Spacecraft Attitude Determination and Control**. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1978.

WIESEL, W. E. **Spaceflight Dynamics**. 2nd. ed., McGraw-Hill, 1997.

WU, Y.; HU, D.; WU, M.; HU, X. Unscented Kalman Filtering for Additive Noise Case: Augmented versus Nonaugmented. **IEEE Signal Processing Letters**, Vol. 12, No. 5, 2005, pp. 357-360.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">DM</p>	2. DATA <p style="text-align: center;">16 de junho de 2008</p>	3. DOCUMENTO N° <p style="text-align: center;">CTA/ITA/DM-018/2008</p>	4. N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">156</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Estimação de Atitude e Velocidade Angular de Satélites Utilizando Medidas do Campo Geomagnético e da Direção do Sol			
6. AUTOR(ES): Davi Antônio do Santos			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Estimação de Atitude; Estimação de Velocidade Angular; Filtro de Kalman <i>Unscented</i> ; Satélite Universitário; Determinação de Atitude.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Controle de atitude de satélites; Estimação de sistemas; Velocidade angular; Filtros de Kalman; Satélites artificiais; Engenharia aeroespacial			
10. APRESENTAÇÃO: <p style="text-align: right;">X Nacional Internacional</p> ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação. Área de Sistemas e Controle. Orientador: Jacques Waldmann. Defesa em 24/04/2008. Publicada em 2008.			
11. RESUMO: Um Sistema de Controle de Atitude (SCA) requer estimativas da atitude e velocidade angular em tempo real para que, em malha fechada, ele possa corrigir o apontamento do satélite conforme desejado. Essas estimativas são produzidas por um Sistema de Determinação de Atitude (SDA), o qual se constitui basicamente de sensores e de métodos de estimação. O desenvolvimento de satélites de baixo custo motiva pesquisas sobre métodos que possibilitam a estimação de atitude e velocidade angular tendo em vista o uso de medidas apenas de sensores de atitude, evitando-se o emprego de girômetros. Sensor solar e magnetômetro são sensores de atitude comumente utilizados por apresentarem baixo consumo de energia, ocuparem pouco espaço, serem leves e baratos. O presente trabalho tem por objeto revisar métodos de estimação baseados no filtro de Kalman estendido (EKF) e propor, com o intento de investigação, métodos semelhantes baseados no filtro de Kalman <i>unscented</i> (UKF). Adicionalmente, propõe-se ao final um SDA autônomo para satélites de baixo custo, estabilizados por rotação ou controlados em 3 eixos, que se movem em órbitas terrestres baixas e embarcam magnetômetro e sensores solares. Os estimadores desse sistema são avaliados com dados simulados. Os resultados indicam que o conjunto de sensores que se pretende utilizar no satélite universitário ITASAT produz estimativas que divergem durante movimentos angulares lentos em períodos de eclipse solar. Dessa forma, o controle de atitude em 3 eixos baseado nas estimativas de atitude e de velocidade angular produzidas pelo SDA proposto deve ser avaliado cautelosamente para que, mesmo em períodos de eclipse, seja capaz de prover segurança térmica cumprindo com a restrição de ortogonalidade entre o eixo de simetria do satélite e a direção do Sol. Os resultados obtidos serão utilizados no SDA do satélite ITASAT em desenvolvimento no ITA sob a égide da Agência Espacial Brasileira.			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO			