INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
DIVISÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECATRÔNICA
MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

Lista de Exercícios 10

Prof. *Davi* Antônio dos Santos

1. Seja um sistema modelado em espaço de estados por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [0\ 1]$$

Obtenha a função de transferência $G(s) \triangleq Y(s)/U(s)$, a equação característica e os autovalores correspondentes. A função de transferência $G(s)$ é única?

2. Seja um sistema dinâmico descrito por um modelo em espaço de estados na forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Determine, analiticamente, a resposta $y(t)$ em função de uma entrada $u(t)$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq 5 \\ 2, & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

e considerando condições iniciais nulas, para os seguintes casos:

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0]$

b. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 1]$

c. $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad 0 \quad 0]$

d. $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 1 \quad 0]$

3. Seja uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um polinômio qualquer dessa matriz, $p(A)$, de grau $n + i$, $i \in \mathbb{Z}_+$:

$$p(A) = \beta_{n+i}A^{n+i} + \beta_{n+i-1}A^{n+i-1} + \cdots + \beta_1 A + \beta_0 I.$$

Usando o Teorema de Cayley-Hamilton (*PDF 18, slide 8*), mostre que o polinômio $p(A)$ pode ser reescrito como

$$p(A) = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I.$$

4. Usando os métodos 1, 2 e 3 apresentados na Seção X.3.5, obtenha expressões para o cálculo da exponencial matricial $\exp(At)$, em termos de exponenciais escalares, considerando:

   a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

   c. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

5. Seja um sistema modelado em espaço de estados por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1\ 0]$$

Faça uma mundaça de coordenadas $x = Pz$ tal que a matriz de estado nas coordenadas de z seja diagonal.

6. Seja um sistema LIT modelado por

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 11s + 30}$$

   a. Obtenha a realização de $G(s)$ na forma canônica controlável.

   b. Obtenha a realização de $G(s)$ na forma canônica observável.

   c. Obtenha a realização de $G(s)$ na forma canônica diagonal.

7. Seja um sistema LIT modelado por

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

   a. Obtenha a realização de $G(s)$ na forma canônica controlável.

   b. Obtenha a realização de $G(s)$ na forma canônica observável.

   c. Obtenha a realização de $G(s)$ na forma canônica diagonal.

8. Determine as condições em b_1, b_2, c_1 e c_2 sob as quais o sistema modelado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

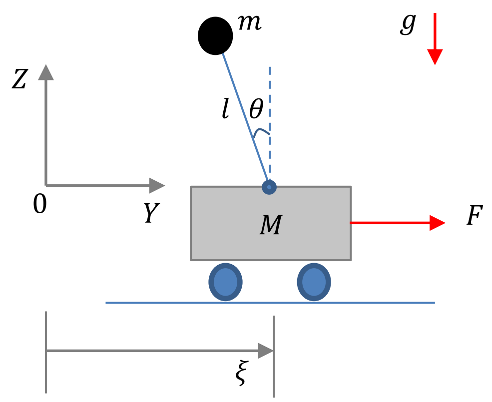
$$y = [c_1 \quad c_2] x$$

seja ao mesmo tempo completamente controlável e completamente observável.

9. Seja um pêndulo invertido bidimensional montado sobre um carrinho sujeito a movimentos lineares[1], conforme ilustrado na figura abaixo. A haste do pêndulo é considerada bem mais leve do que a esfera

[1] A dinâmica do pêndulo invertido é similar à de um veículo lançador de satélites (VLS). As diferenças essenciais estão 1) no fato de o VLS apresentar 6 DOF de movimento (posição tridimensional e atitude em três eixos) e 2) no fato do VLS ter a sua massa variável em função da queima de propelente.

fixada em sua extremidade livre. A massa da esfera é m e o comprimento da haste é l. Despreza-se qualquer atrito. Esse sistema apresenta uma única entrada de força de controle, a força F, e dois graus de liberdade (DOF) de movimento, a posição ξ e o ângulo θ. Por ter mais DOF de movimento do que forças de controle, diz-se que esse sistema é subatuado.



a. Obtenha as equações de movimento do sistema em questão.

b. Defina as variáveis de estado $x_1 \triangleq \xi$, $x_2 \triangleq \dot{\xi}$, $x_3 \triangleq \theta$, $x_4 \triangleq \dot{\theta}$, a entrada $u \triangleq F$ e as variáveis de saída $y_1 \triangleq \xi$ e $y_2 \triangleq \theta$. Com base nessas definições, apresente o modelo do sistema em espaço de estados:

$$\dot{x} = f(x,u),$$

$$y = g(x,u),$$

onde $x \triangleq [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$, $y \triangleq [y_1, y_2]^{\mathrm{T}}$ e f e g são as funções, em geral, não lineares, a serem determinadas.

c. Linearize o modelo obtido em b usando o método da série de Taylor, considerando como ponto de operação $\bar{x} = \left[\bar{\xi}, 0,0,0\right]^{\mathrm{T}}$, onde $\bar{\xi}$ é uma constante.