INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

X. MÉTODOS DE ESPAÇO DE ESTADOS

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)

Departamento de Mecatrônica

http://www.professordavisantos.com

Outubro/2019

São José dos Campos

Sumário

X. MÉTODOS DE ESPAÇO DE ESTADOS

X.1. Modelo em Espaço de Estados

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.4. Realizações no Espaço de Estados

X.5. Controlabilidade

X.6. Observabilidade

X.1. Modelo em Espaço de Estados

X.1.1. Definições

Vetor Variável de Estado:

Seja um sistema dinâmico com entrada $u(t) \in \mathbb{R}^r$ e saída $y(t) \in \mathbb{R}^m$, em que $t > 0$ é um instante de tempo contínuo:

O vetor variável de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é tal que o seu conhecimento no instante t_0, $x(t_0)$, juntamente com o conhecimento da entrada $u(t)$ em $t \in [t_0, \bar{t}]$, descreve completamente o comportamento dinâmico do sistema em qualquer instante $\bar{t} > t_0$.

X.1. Modelo em Espaço de Estados

Variáveis de Estado:

São os componentes x_1, $x_2,\ldots,$ x_n do vetor variável de estado:

$$x \triangleq [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$$

Estado:

O estado de um sistema num instante $\bar{t}$ qualquer é o valor do vetor variável de estado nesse instante, $x(\bar{t})$.

Espaço de Estados:

É o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, cujos elementos são possíveis estados do sistema.

X.1. Modelo em Espaço de Estados

Modelo em Espaço de Estados:

Não Linear e Variante no Tempo:

É composto de uma equação de estado, que compreende n equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (1)$$

e de uma equação de saída, formada por m equações algébricas:

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \qquad (2)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

X.1. Modelo em Espaço de Estados

Linear e Variante no Tempo:

Considerando que as funções f e g em (1)-(2) sejam lineares em $x(t)$ e $u(t)$, aquele modelo pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{3}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \tag{4}$$

em que $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é a matriz de entrada, $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída, $D(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ é a matriz de transmissão direta.

X.1. Modelo em Espaço de Estados

Linear e Invariante no Tempo:

Considerando que as matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ em (3)-(4) sejam constantes, aquele modelo pode ser reescrito como:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5}$$

$$y = Cx + Du \tag{6}$$

OBS: A notação de tempo nas variáveis x, y e u foi e será daqui em diante omitida por simplicidade.

X.1. Modelo em Espaço de Estados

As equações (5)-(6) podem ser reescritas componente a componente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}}_{\triangleq\,\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{\triangleq\,A} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}}_{\triangleq\,x} + \underbrace{\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & a_{nr}\end{bmatrix}}_{\triangleq\,B} \underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_r\end{bmatrix}}_{\triangleq\,u}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}}_{\triangleq\,y} = \underbrace{\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}}_{\triangleq\,C} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}}_{\triangleq\,x} + \underbrace{\begin{bmatrix}d_{11} & \cdots & d_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{n1} & \cdots & d_{nr}\end{bmatrix}}_{\triangleq\,D} \underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_r\end{bmatrix}}_{\triangleq\,u}$$

X.1. Modelo em Espaço de Estados

X.1.2. Linearização

Seja o modelo em espaço de estados, não linear:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

O correspondente modelo linearizado pelo método da série de Taylor, em torno da referência $x(t) = \bar{x}(t)$, é dado por

$$\delta\dot{x} = \nabla_x f(\bar{x}, \bar{u})\delta x + \nabla_u f(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

$$\delta y = \nabla_x g(\bar{x}, \bar{u})\delta x + \nabla_u g(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

...

X.1. Modelo em Espaço de Estados

onde $\delta x \triangleq x - \bar{x}$, $\delta y \triangleq y - \bar{y}$, $\delta u \triangleq u - \bar{u}$, $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, t)$, $\bar{u}$ é tal que $0 = f(\bar{x}, \bar{u}, t)$ e as matrizes Jacobianas são dadas por:

$$\nabla_x f(\bar{x},\bar{u}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x},\bar{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x},\bar{u}) \end{bmatrix} \qquad \nabla_u f(\bar{x},\bar{u}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r}(\bar{x},\bar{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r}(\bar{x},\bar{u}) \end{bmatrix}$$

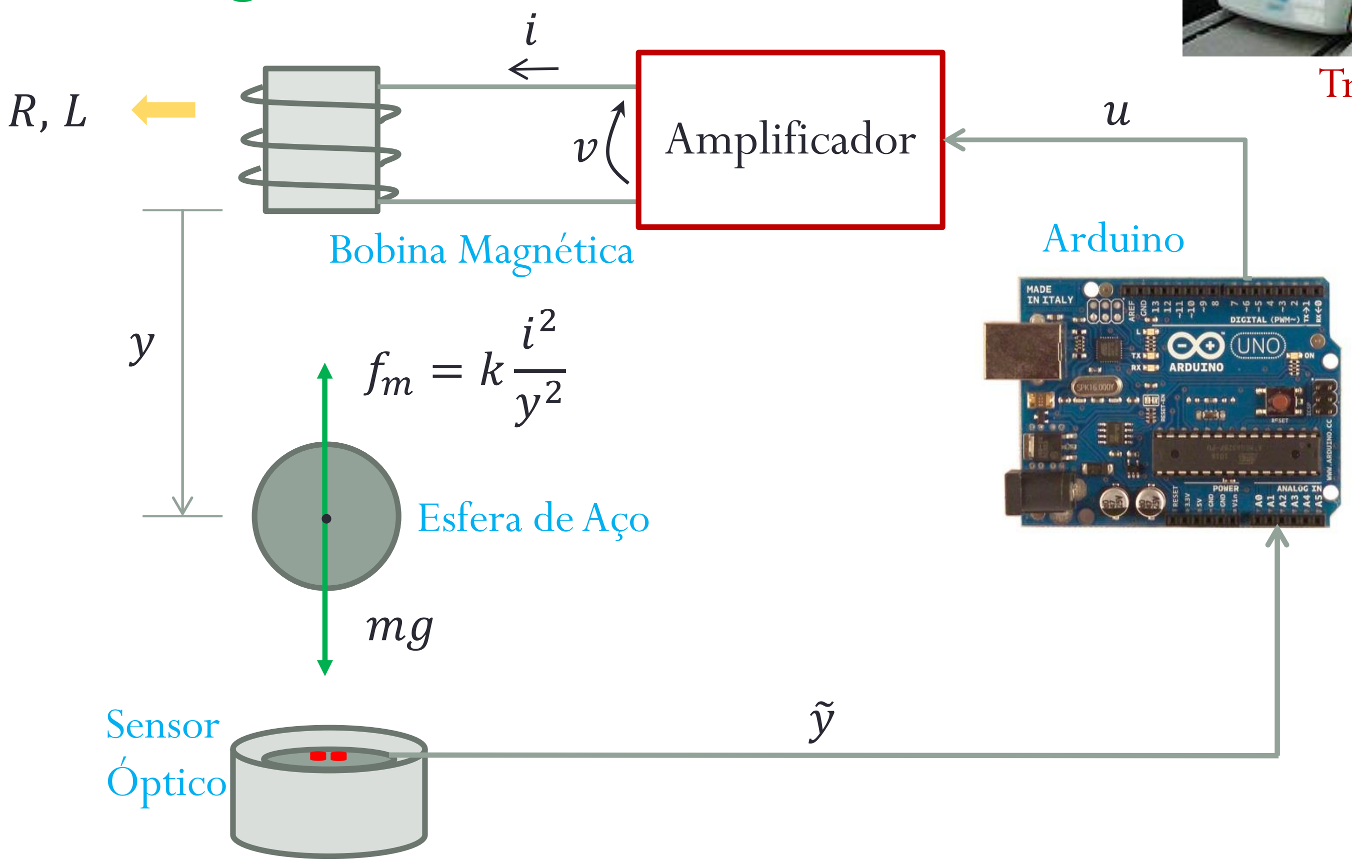
$$\nabla_x g(\bar{x},\bar{u}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x},\bar{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{x},\bar{u}) \end{bmatrix} \qquad \nabla_u g(\bar{x},\bar{u}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r}(\bar{x},\bar{u}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1}(\bar{x},\bar{u}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r}(\bar{x},\bar{u}) \end{bmatrix}$$

X.1. Modelo em Espaço de Estados

X.1.3. Exemplos de Modelagem

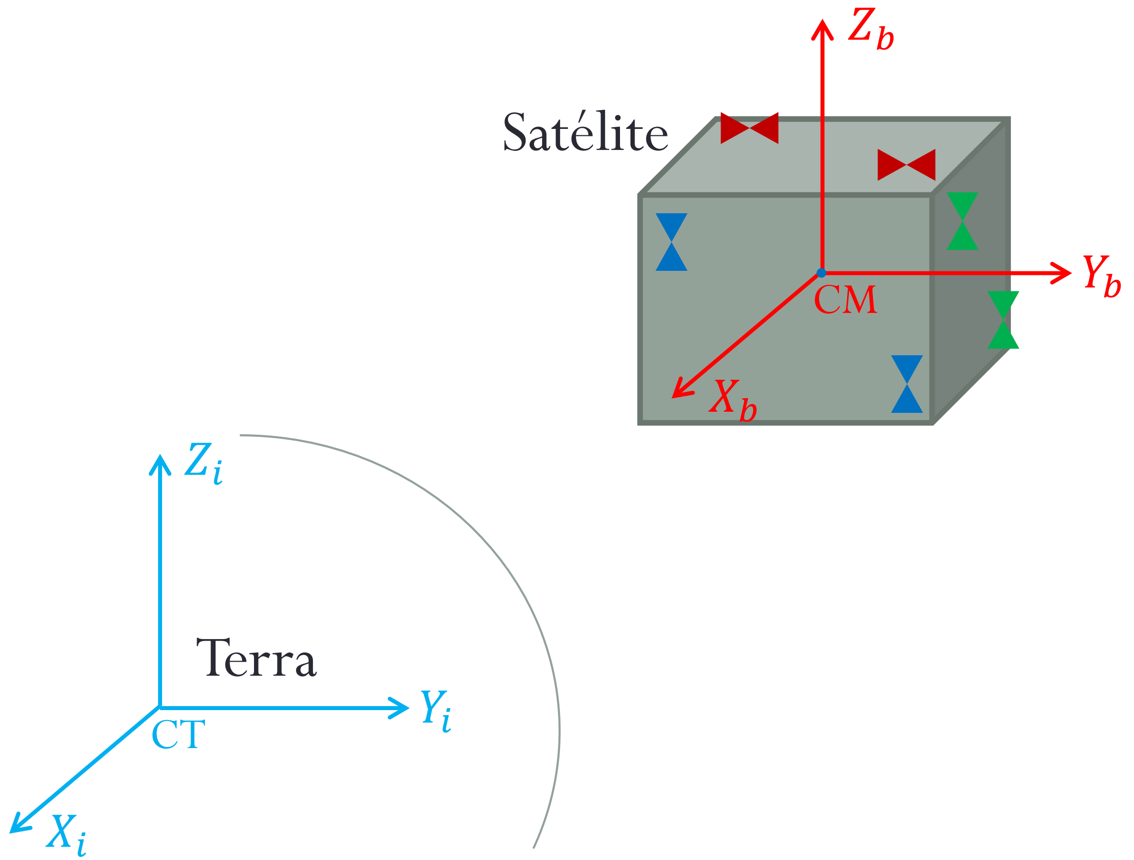
Levitador Magnético:

Trem de Xangai



X.1. Modelo em Espaço de Estados

Satélite Rígido – Movimento de Atitude:



X.2. Solução de Equações de Estado LIT

X.2.1. Equação Homogênea

Seja a equação de estado homogênea ($u = 0$) de um sistema LIT:

$$\dot{x} = Ax \tag{7}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Enfoque Clássico:

Suponha uma solução para (7) em forma de série infinita de potências de t:

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots \tag{8}$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Substituindo (8) em (7), vem:

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + 4b_k t^3 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots$$
$$= Ab_0 + Ab_1 t + Ab_2 t^2 + \cdots + Ab_k t^k + \cdots \qquad (9)$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em t de ambos os lados de (9), obtemos:

$$\begin{aligned} b_1 &= Ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2}Ab_1 = \frac{1}{2}A^2 b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3}Ab_2 = \frac{1}{3\times 2}A^3 b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!}A^k b_0 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (10)$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Adicionalmente, substituindo $t = 0$ em (8), obtemos:

$$b_0 = x(0) \tag{11}$$

Usando (10) e (11), podemos reescrever a solução $x(t)$ em (8) como:

$$x(t) = x(0) + Ax(0)t + \frac{1}{2!}A^2x(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kx(0)t^k + \cdots$$

$$x(t) = \underbrace{\left(I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots\right)}_{\triangleq\, e^{At}} x(0)$$

$$\boxed{x(t) = e^{At}\, x(0)} \tag{12}$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Matriz de Transição de Estado:

É definida por

$$\Phi(t) \triangleq e^{At} \qquad (13)$$

e tem as seguintes propriedades:

1. $\Phi(0) = I$
2. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
3. $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$
4. $\Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$
5. $\Phi^n(t) = \Phi(nt)$
6. $\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Enfoque da Transformada de Laplace:

Aplicando a TL em (7), obtemos:

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

Logo, a solução $x(t)$ fica:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) \qquad (14)$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

De (12), (13) e (14), constata-se que a matriz de transição de estado é também dada por:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \tag{15}$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

X.2.2. Equação Não Homogênea

Seja a equação de estado não homogênea de um sistema LIT:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{16}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$.

Enfoque Clássico:

De (16),

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) \tag{17}$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Multiplicando (17) à esquerda por e^{-At}, vem:

$$e^{-At}\big(\dot{x}(t) - Ax(t)\big) = e^{-At}Bu(t) \qquad (18)$$

Notamos, no entanto, que

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}\dot{x}(t) - Ae^{-At}x(t)$$

que, por vez, corresponde ao primeiro termo de (18). Pode-se, então, reescrever (18) na forma

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t) \qquad (19)$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Integrando (19) de t_0 a t, obtemos:

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

ou

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (20)$$

X.2. Solução de Equações de Estado LIT

Enfoque da Transformada de Laplace:

Aplicando a TL em (16), vem:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \qquad (21)$$

Multiplicando (21) à esquerda por $(sI - A)^{-1}$, temos:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \qquad (22)$$

Por fim, aplicando a TL inversa em (22), obtemos:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (23)$$

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.3.1. Autovetores, Autovalores e Equação Característica

Autovetores e Autovalores:

Um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é um vetor não nulo que quando pré-multiplicado por A, resulta num vetor paralelo a v, *i.e.*,

$$Av = \lambda v \tag{24}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o autovalor de A correspondente a v.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Equação Característica:

Da equação (24), vem

$$\lambda v - Av = 0$$

$$(\lambda I - A)v = 0 \qquad (25)$$

Para $v \neq 0$, a equação (25) se verifica se e somente se

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0} \qquad (26)$$

Essa última equação (polinômial) de grau n na variável em λ é a chamada equação característica de A.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.3.2. Relação entre Modelo em Espaço de Estados e FT

Seja um sistema LIT modelado pelo seguinte modelo em espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{27}$$

$$y = Cx + Du \tag{28}$$

Considerando condições iniciais nulas, $x(0) = 0$, e tomando a TL de (27) e (28), obtemos:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \tag{29}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{30}$$

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Isolando $X(s)$ em (29) e substituindo-o em (30), obtemos:

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

donde se identifica a função de transferência do sistema como sendo

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

ou ainda

$$G(s) = \frac{C\mathrm{Adj}(sI - A)B + \det(sI - A)\,D}{\det(sI - A)} \qquad (31)$$

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Por inspeção de (31), obtemos a equação característica de $G(s)$:

$$\det(sI - A) = 0 \tag{32}$$

cuja solução, sabemos, são os polos de $G(s)$.

Comparando (32) e (26), concluímos que

Os polos de um sistema LIT correspondem aos autovalores de sua matriz de estado A.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.3.3. Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema de Cayley-Hamilton:

Estabece que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfaz a sua própria equação característica. Matematicamente, seja o polinômio característico de A:

$$\Delta(\lambda) \triangleq \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

O teorema estabelece que

$$\Delta(A) \triangleq A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

Prova: vide livro (OGATA, 1993).

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Teorema Sobre Polinômio de Matriz:

Seja uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um polinômio qualquer dessa matriz, $p(A)$, de grau $n+i$, $i \in \mathbb{Z}_+$:

$$p(A) = \beta_{n+i}A^{n+i} + \beta_{n+i-1}A^{n+i-1} + \cdots + \beta_1 A + \beta_0 I$$

Usando o Teorema de Cayley-Hamilton, pode-se provar que o polinômio $p(A)$ pode ser reescrito como

$$p(A) = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I \qquad (33)$$

Prova: vide livro (OGATA, 1993).

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.3.4. Diagonalização

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real em que a soma das multiplicidades geométricas de seus autovalores seja igual a n. Nesse caso, sabe-se que é possível reescrever A na forma:

$$\boxed{A = T \Lambda T^{-1}} \tag{34}$$

onde

$$T \triangleq \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$ (Autovetores de A)

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$ (Autovalores de A)

Dizemos então que A é diagonalizável.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.3.5. Cálculo de Exponencial Matricial

Essa seção dedica-se ao cálculo da exponencial matricial:

$$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots \quad (35)$$

Método 1 (Transformada Inversa de Laplace):

Da equação (15), sabe-se que a exponencial matricial e^{At} pode ser calculada pela seguinte transformada inversa de Laplace:

$$\boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}} \quad (36)$$

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Método 2 (Diagonalização):

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real diagonalizável. Neste caso, pode-se calcular a exponencial matricial por:

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} \qquad (37)$$

onde

$T \triangleq [v_1 \quad \cdots \quad v_n]$ (Autovetores de A)

$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ (Autovalores de A)

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Método 3 (Interpolação de Sylvester):

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz real com autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Da equação (33), sabemos que a exponencial matricial e^{At} pode ser escrita na forma:

$$e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \alpha_{n-2}(t)A^{n-2} + \cdots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I \quad (38)$$

Pode-se mostrar que, neste caso (autovalores distintos),

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_{n-1}(t){\lambda_i}^{n-1} + \alpha_{n-2}(t){\lambda_i}^{n-2} + \cdots + \alpha_1(t)\lambda_i + \alpha_0(t) \quad (39)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Portanto,

pode-se calcular os coeficientes α_i, para $i = 1, 2, \dots, n$, através das n equações algébricas em (39) e, em seguida, calcular e^{At} usando a equação (38).

Este método pode ser estendido para o caso em que A contém autovalores com multiplicidades algébricas maiores do que 1. Vide Seção 11.5 do livro (OGATA, 1993).

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

X.3.6. Mudança de Coordenadas

Seja um sistema LIT modelado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{40}$$

$$y = Cx + Du \tag{41}$$

Considere a seguinte mudança de coordenadas do vetor variável de estado:

$$x = Pz \tag{42}$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transformação não singular e $z \in \mathbb{R}^n$ é o vetor variável de estado no novo sistema de coordenadas.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

O modelo em espaço de estados no novo sistema de coordenadas é obtido substituindo (42) em (40)-(41):

$$P\dot{z} = APz + Bu \tag{43}$$

$$y = CPz + Du \tag{44}$$

ou

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu \tag{45}$$

$$y = CPz + Du \tag{46}$$

Essa operação é frequentemente chamada de transformação de similar-dade.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Invariância de Propriedades:

A equação característica do sistema transformado é dada por:

$$\det(\lambda I - P^{-1}AP) = 0$$

$$\det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = 0 \qquad (47)$$

Como P é não singular, $\det(P) \neq 0$ e $\det(P^{-1}) \neq 0$. Logo, a equação (47) implica em

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (48)$$

Portanto, como as equações características de A e $P^{-1}AP$ são iguais, pode-se afirmar que os seus autovalores e autovetores também são iguais.

X.3. Resultados Úteis da Álgebra de Matrizes

Por outro lado, usando (31), a FT do sistema transformado pode ser escrita como:

$$G_z(s) = CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D$$

$$G_z(s) = CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B + D$$

$$G_z(s) = CPP^{-1}[(sI - A)]^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$G_z(s) = C[(sI - A)]^{-1}B + D = G(s) \qquad (49)$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

Definição:

Seja um sistema SISO LIT modelado por:

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{50}$$

Uma realização (A, B, C, D) de $G(s)$ consiste nas matrizes que parametrizam uma representação em espaço de estados que descreve as mesmas dinâmicas que $G(s)$.

X.4. Realizações no Espaço de Estados

Comentários:

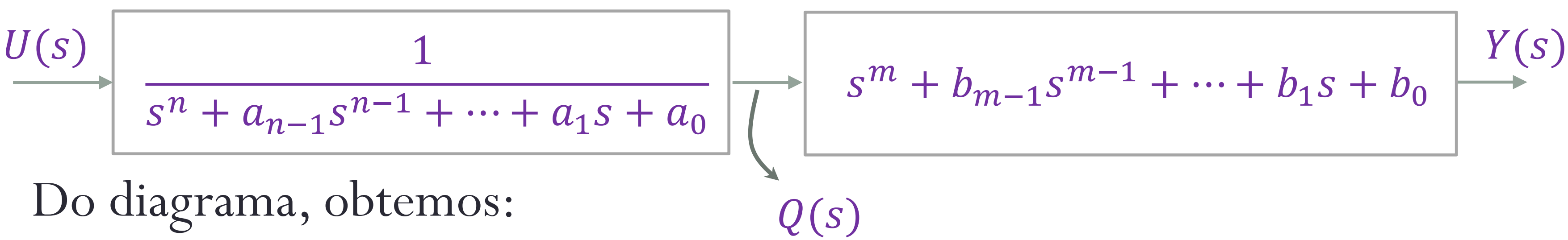
1. Considera-se aqui que $G(s)$ seja estritamente própria ($m < n$), o que implica em $D = 0$;

2. Há infinitas possibilidades de realização de uma mesma FT $G(s)$ (pois a partir de uma, posso obter infinitas outras por transformação de similaridade; vide Seção X.3.6)

X.4. Realizações no Espaço de Estados

X.4.1. Forma Canônica Controlável

Seja a representação de $G(s)$ em (50) no seguinte diagrama de blocos:



Do diagrama, obtemos:

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

que, no domínio do tempo, corresponde a

$$q^{(n)} + a_{n-1}q^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{q} + a_0 q = u \qquad (51)$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

Definindo as variáveis de estado

$$x_1 \triangleq q$$
$$x_2 \triangleq \dot{q}$$
$$\vdots$$
$$x_n \triangleq q^{(n-1)},$$

obtêm-se de (51) as seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u \end{aligned} \quad (52)$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

Do diagrama anterior, obtemos ainda:

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0,$$

que, no domínio do tempo, resulta em

$$y = q^{(m)} + b_{m-1}q^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{q} + b_0 q \qquad (53)$$

Usando as variáveis de estado $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obtemos de (53) a seguinte equação de saída:

$$\boxed{y = x_{m+1} + b_{m-1}x_m + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1} \qquad (54)$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

Conclui-se que as equações (52) e (54) correspondem à realização (A, B, C, D) de $G(s)$ em que

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & 1 & 0_{1\times(n-m-1)} \end{bmatrix} \qquad D \triangleq 0$$

Essa realização é a chamada forma canônica controlável (FCC).

X.4. Realizações no Espaço de Estados

X.4.2. Forma Canônica Observável

Seja (A, B, C, D) a realização FCC de $G(s)$. O modelo em espaço de estados $(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}}, D^{\mathrm{T}})$ consiste também numa realização de $G(s)$. A essa última realização, damos o nome de forma canônica observável (FCO).

Para verificar a afirmação acima, seja $\bar{G}(s)$ a função de transferência correspondente a $(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}}, D^{\mathrm{T}})$. Da Seção X.3.2, sabemos que

$$\bar{G}(s) = B^{\mathrm{T}}\left(sI - A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} C^{\mathrm{T}}.$$

Como $\bar{G}(s)$ é escalar,

$$\bar{G}(s) = \bar{G}(s)^{\mathrm{T}} = C(sI - A)^{-1}B = G(s)$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

Denote agora a realização FCO por (A, B, C, D). Neste caso, de (55) e do *slide* anterior, concluímos que:

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B \triangleq \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ 1 \\ 0_{n-m-1} \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D \triangleq 0$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

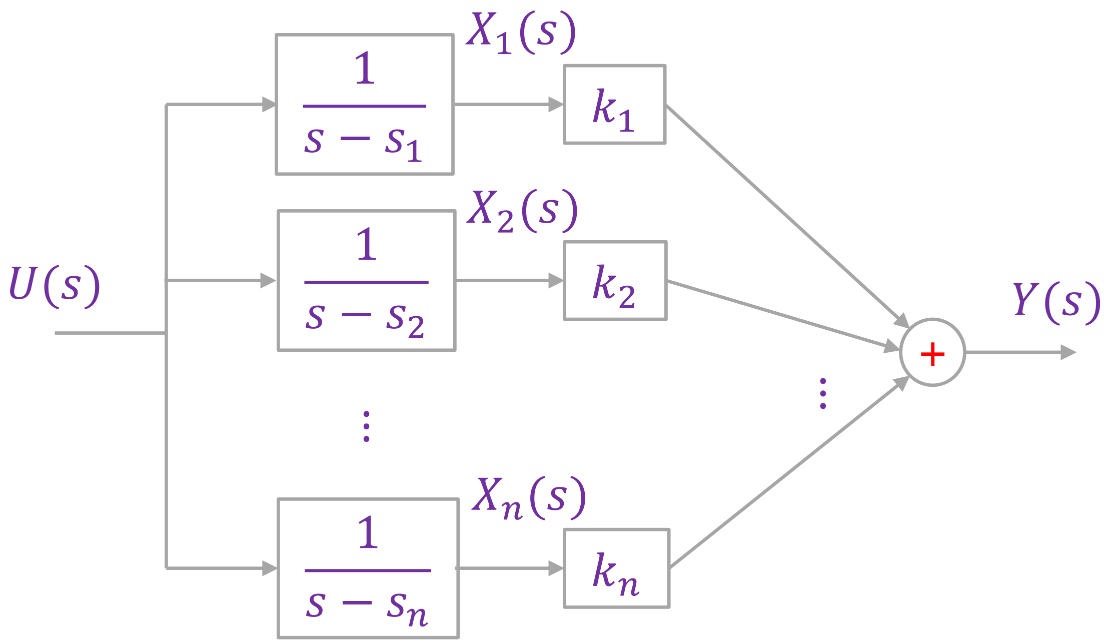
X.4.3. Forma Canônica Diagonal

Considerando que $G(s)$ tenha polos distintos $s_1,\ s_2, \ldots,\ s_n$, sua decomposição em frações parciais fica

$$G(s) = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - s_n} \tag{57}$$

Seja a representação de $G(s)$ em (57) pelo seguinte diagrama de blocos:

X.4. Realizações no Espaço de Estados



Do diagrama, obtemos as seguintes variáveis de estado:

$$X_1(s) \triangleq \frac{U(s)}{s-s_1}, X_2(s) \triangleq \frac{U(s)}{s-s_2}, \ldots, X_n(s) \triangleq \frac{U(s)}{s-s_n}$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

que, no domínio do tempo, corresponde a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= s_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= s_2 x_2 + u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= s_n x_n + u\end{aligned} \tag{58}$$

Do diagrama anterior, obtemos ainda a equação de saída

$$Y(s) = k_1 X_1(s) + k_2 X_2(s) + \cdots + k_n X_n(s)$$

que, no domínio do tempo, corresponde a

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n \tag{59}$$

X.4. Realizações no Espaço de Estados

As equações (58) e (59) correspondem à realização (A, B, C, D) de $G(s)$, em que

$$A \triangleq \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \qquad B \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (60)$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \qquad D \triangleq 0$$

Essa realização é a chamada forma canônica diagonal (FCD).

X.5. Controlabilidade

Modelo do Sistema:

Seja um sistema LIT modelado por:

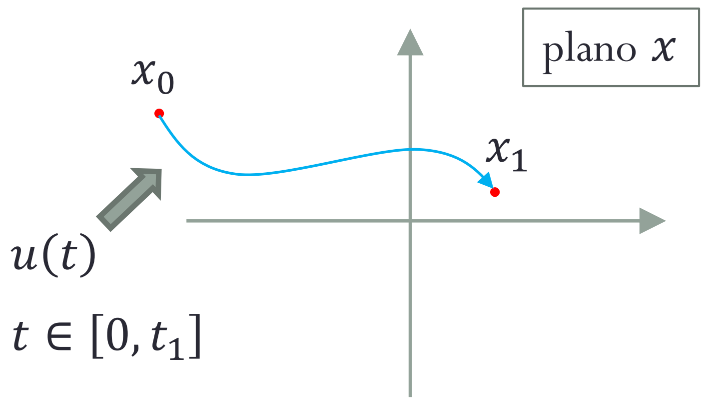
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{61}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

X.5. Controlabilidade

Definição (Controlabilidade de um Ponto):

O estado inicial $x(0) = x_0$ do sistema modelado por (61) é dito controlável se existe um sinal de entrada $u(t), t \in [0, t_1]$, limitado, que leva o estado do sistema para um ponto arbitrário $x(t_1) = x_1$ num período de tempo finito t_1.



X.5. Controlabilidade

Definição (Completamente Controlável):

Se todos os estados iniciais possíveis $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do sistema modelado por (61) forem controláveis, então o sistema em questão é dito ser completamente controlável.

Note que é razoável imaginar neste ponto que caso o sistema não seja completamente controlável, não será possível projetar um controlador para controlar todas as suas variáveis de estado de forma que o vetor variável de estado transite de um ponto arbitrário para outro ponto arbitrário do plano x.

X.5. Controlabilidade

Teorema (Condição de Controlabilidade):

Para que o sistema modelado por (61) seja completamente controlável, é necessário e suficiente que a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} \triangleq [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots A^{n-1}B] \tag{62}$$

tenha posto igual a n.

Prova: *p.* 49 de [K. FURUTA; A. SANO; D. ATHERTON; State Variable Methods in Automatic Control. John Wiley & Sons, 1988.]

X.6. Observabilidade

Seja um sistema LIT modelado por:

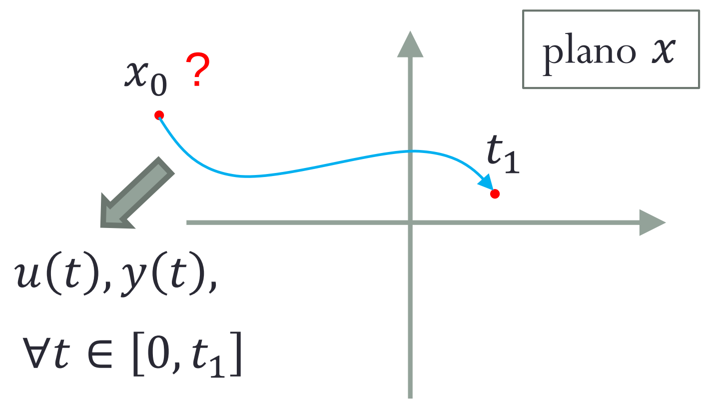
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du \tag{63}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

X.6. Observabilidade

Definição (Observabilidade de um Ponto):

O estado inicial $x(0) = x_0$ do sistema modelado por (63) é dito observável se, conhecendo-se o sinal de saída $y(t), \forall t \in [0, t_1]$ e o sinal de entrada $u(t), \forall t \in [0, t_1]$, para t_1 finito, for possível determinar x_0.



X.6. Observabilidade

Definição (Completamente Observável):

Se todos os estados iniciais possíveis $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do sistema modelado por (63) forem observáveis, então o sistema em questão é dito ser completamente observável.

Note que é razoável imaginar neste ponto que caso o sistema não seja completamente observável, não será possível projetar um "observador" para estimar todas as suas variáveis de estado.

X.6. Observabilidade

Teorema (Condição de Observabilidade):

Para que o sistema modelado por (63) seja completamente observável, é necessário e suficiente que a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (64)$$

tenha posto igual a n.

Prova: p. 51 de [K. FURUTA; A. SANO; D. ATHERTON; State Variable Methods in Automatic Control. John Wiley & Sons, 1988.]. Alternativamente, vide exercício resolvido A-11-20 de (OGATA, 1993).

Obrigado pela presença

e atenção!