



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA  
MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

XI. PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE USANDO  
MÉTODOS DE ESPAÇO DE ESTADOS

---

Prof. Davi Antônio dos Santos ([davists@ita.br](mailto:davists@ita.br))

Departamento de Mecatrônica

<http://www.professordavisantos.com>

Novembro/2019  
São José dos Campos

# Sumário

## XI. PROJETO NO ESPAÇO DE ESTADOS

XI.1. Projeto de Controlador Regulador

XI.2. Projeto de Observador de Estados

XI.3. Projeto de Servocontrolador

XI.4. Realimentação de Estados Observados

# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

## XI.1.1. Definição do Problema

### Planta:

Seja um sistema LIT SISO modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor variável de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada (variável de manipulação),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado e  $B \in \mathbb{R}^n$  é a matriz de entrada. Considere que as matrizes  $A$  e  $B$  sejam conhecidas.

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

### Problema:

Considere que o estado  $x$  do sistema (1) seja conhecido (mensurável).  
Seja então a seguinte lei de controle linear por realimentação de estados:

$$u = -Kx \quad (2)$$

onde

$$K \triangleq [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

é a matriz de realimentação de estados.

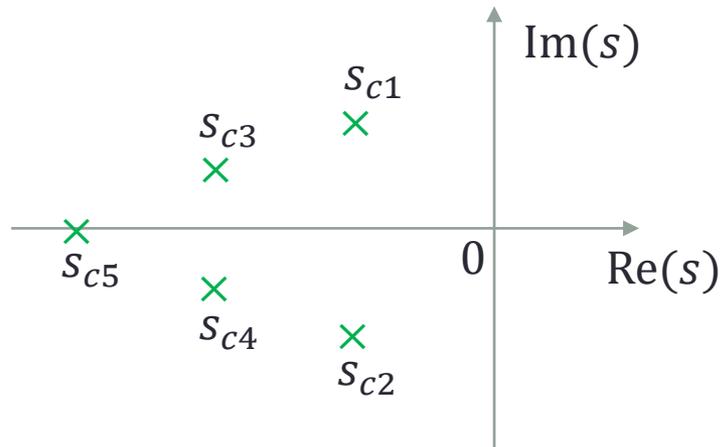
...

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

O **problema** consiste em obter  $K$  que faça com que o **sistema em malha fechada** resultante do uso de (2) em (1) tenha seus polos **alocados** em posições desejadas

$$s_{c1}, s_{c2}, s_{c3}, \dots, s_{cn} \quad (3)$$

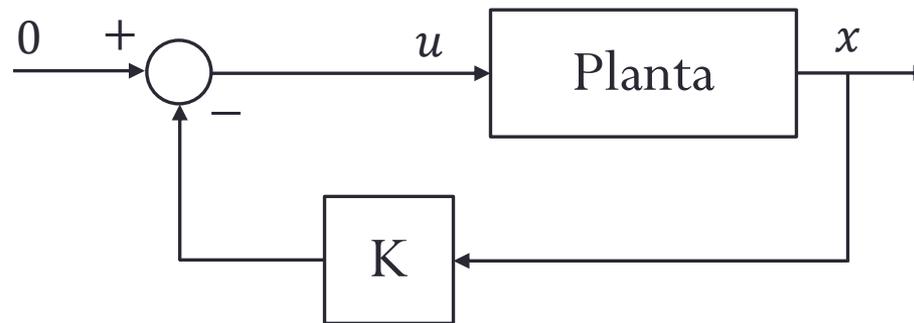
do **plano complexo**.



# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

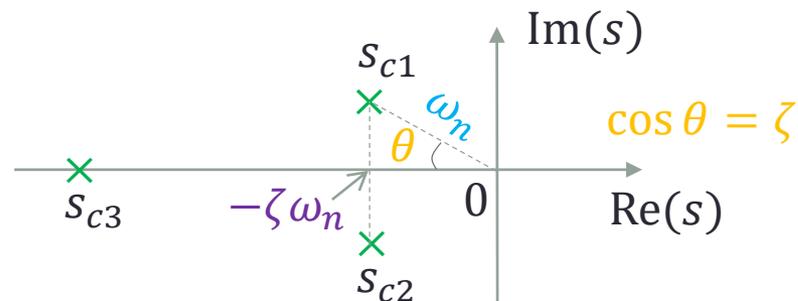
## Comentários:

1. A **estrutura** da malha de controle resultante é:



## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

2. Para  $n = 3$ , a **especificação** de  $s_{c1}$ ,  $s_{c2}$ ,  $s_{c3}$  pode ser feita de forma a atender  $M_p(\zeta)$  e  $t_p(\zeta, \omega_n)$ , bastando escolher, por exemplo,  $s_{c1}$  e  $s_{c2}$  de acordo com a figura



e  $s_{c3}$  real tal que

$$|s_{c3}| \geq 10|\text{Re}(s_{c1})|$$

# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

## XI.1.2. Solução do Problema

### Modelo do Sistema em Malha Fechada:

Substituindo (2) em (1), obtemos o modelo do sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx),$$

$$\dot{x} = A_{MF}x \quad (4)$$

onde  $A_{MF} \triangleq A - BK$  é a matriz de estado do sistema em malha fechada.

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

### Polos de Malha Fechada:

Sabemos que os polos  $s_1, s_2, \dots, s_n$  do sistema em **malha fechada** são dados pela solução da seguinte **equação característica**:

$$\Delta_{MF}(s) \triangleq \det(sI - A + BK) = 0 \quad (5)$$

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

### Ideia da Solução:

De (3) e (5), conclui-se que a **matriz de realimentação**

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$$

deve ser escolhida de forma que

$$\Delta_{MF}(s) = \Delta_d(s) \tag{6}$$

onde  $\Delta_d(s)$  é o polinômio característico *desejado*, dado por:

$$\Delta_d(s) \triangleq (s - s_{c1})(s - s_{c2}) \dots (s - s_{cn}) \tag{7}$$

$$= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \tag{8}$$

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

### Lema:

Seja uma realização **completamente controlável**  $(A, B)$  e o correspondente **polinômio característico**:

$$\Delta_{MA}(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

A **mudança de coordenadas**  $x = Pz$ , com  $P = CW$ , onde

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad W \triangleq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

...

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

... leva à realização

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu \quad (9)$$

e à lei de controle

$$u = -KPz \quad (10)$$

em que

$$P^{-1}AP \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad P^{-1}B \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(esta é a Forma Canônica Controlável!)

*Prova:* vide exercício resolvido A-12-3 de (OGATA, 1993).

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

### Teorema:

A condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de solução

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$$

para a equação (6) é que o par  $(A, B)$  seja completamente controlável.

### Prova:

Como  $(A, B)$  é completamente controlável, consideremos a mudança de coordenadas  $x = Pz$  do lema anterior. Nesse caso, substituindo (10) em (9), obtemos o modelo do sistema em malha fechada:

$$\dot{z} = \underbrace{(P^{-1}AP - P^{-1}BKP)}_{\triangleq A_{MF}} z. \quad (12)$$

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

Defina

$$\hat{K} \triangleq KP \triangleq [\delta_0 \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n-1}] \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (13)$$

Substituindo (13) e (11) em (12), a matriz de estado  $A_{MF}$  fica

$$A_{MF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_0 \ \delta_1 \ \cdots \ \delta_{n-1}]$$

$$\therefore A_{MF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - \delta_0 & -a_1 - \delta_1 & -a_2 - \delta_2 & \cdots & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

Por outro lado, do polinômio característico desejado (dado)

$$\begin{aligned}\Delta_d(s) &\triangleq (s - s_{c1})(s - s_{c2}) \dots (s - s_{cn}) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

obtemos a **matriz de estado desejada**  $A_d$  na FCC, *i.e.*,

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

Comparando (14) e (15), obtemos

$$\delta_0 = \alpha_0 - a_0$$

$$\delta_1 = \alpha_1 - a_1$$

...

$$\delta_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1}$$

Por fim, de (13), obtemos a **matriz de ganho**  $K$ :

$$K = [\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]P^{-1} \quad (16)$$

desde que  $P^{-1}$  exista, que por vez exige que  $(A, B)$  seja **completamente controlável**, provando assim o teorema. ■

# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

## Métodos de Projeto:

Em seguida, apresentamos dois métodos alternativos que poderemos seguir para projetar um controlador regulador, como o da equação (2). Esses métodos se baseiam, respectivamente, na prova do teorema do slide 13 e na ideia da alocação de polos expressa pela equação (6).

# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

## Método 1:

Modelo da Planta

$$(A, B)$$

Especificações

$$s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{cn}$$

1. Verifique se a realização  $(A, B)$  é completamente controlável.
2. Calcule a matriz  $P = CW$  de mudança de coordenadas que transforma  $(A, B)$  para a FCC  $(P^{-1}AP, P^{-1}B)$ .<sup>1</sup>

...

---

<sup>1</sup> Se  $(A, B)$  já estiver na FCC, então  $P = I$ .

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

3. Obtenha os **coeficientes**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  do **polinômio característico** de **malha aberta**:

$$\Delta_{MA}(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

4. Obtenha os **coeficientes**  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  do **polinômio característico** **desejado**:

$$\begin{aligned}\Delta_d(s) &\triangleq (s - s_{c1}) \dots (s - s_{cn}) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

5. Finalmente, calcule o ganho de realimentação:

$$K = [\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]P^{-1}$$

# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

## Método 2:

Modelo da Planta  
 $(A, B)$

Especificações  
 $s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{cn}$

1. Verifique se a realização  $(A, B)$  é **completamente controlável**.
2. Obtenha o **polinômio característico desejado**:

$$\begin{aligned}\Delta_d(s) &\triangleq (s - s_{c1}) \dots (s - s_{cn}) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

## XI.1. Projeto de Controlador Regulador

3. Obtenha o **polinômio característico de malha fechada** em função dos elementos de  $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{MF}}(s) &\triangleq \det(sI - A + BK) \\ &= s^n + \beta_{n-1}(K)s^{n-1} + \dots + \beta_1(K)s + \beta_0(K)\end{aligned}$$

4. Calcule os ganhos  $k_1, k_2, \dots, k_n$  resolvendo o seguinte sistema de  $n$  equações algébricas lineares:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \beta_0(K) \\ \alpha_1 &= \beta_1(K) \\ &\dots \\ \alpha_{n-1} &= \beta_{n-1}(K)\end{aligned}$$



# XI.1. Projeto de Controlador Regulador

## XI.1.3. Exemplo

### Servomecanismo de Posição Angular

Seja um servomecanismo de posição angular modelado por

$$G(s) \triangleq \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{2}{s(s+1)}$$

onde  $\Theta(s)$  é a TL do sinal de ângulo e  $T(s)$  é a TL do torque do motor.

Projete um regulador  $u = -Kx$  para controlar as variáveis de estado  $x_1 \triangleq \theta$  e  $x_2 \triangleq \dot{\theta}$  do sistema em questão. A especificação de desempenho consiste em alocar os polos de MF em  $s_{c1} = s_{c2} = -3$ .

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### XI.2.1. Definição do Problema

#### Planta:

Seja um sistema LIT SISO modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (17)$$

$$y = Cx \quad (18)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor variável de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada (variável de manipulação),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado,  $B \in \mathbb{R}^n$  é a matriz de entrada e  $C \in \mathbb{R}^n$  é a matriz de saída. Considere que  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam conhecidas.

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Estrutura do Observador:

Denote uma estimativa do estado  $x \in \mathbb{R}^n$  de (17)-(18) por  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ . Considere um **observador** (ou estimador) de estados **linear** com a seguinte **estrutura**:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (19)$$

onde  $\hat{y} \triangleq C\hat{x}$  e

$$L \triangleq \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

é a **matriz de ganhos do observador**.

Note que o observador em (19) estima o estado do sistema mediante uma fusão entre o modelo desse sistema e medidas da sua saída.

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Dinâmica do Erro de Estimação:

Defina o erro de estimação  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  de  $x \in \mathbb{R}^n$  por

$$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} \quad (20)$$

Derivando (20) e usando as equações (17), (18) e (19), chegamos ao seguinte modelo dinâmico do erro de estimação

$$\dot{\tilde{x}} = A_e \tilde{x} \quad (21)$$

onde  $A_e \triangleq A - LC$  é a matriz de estado da dinâmica do erro de estimação.

Note que se os autovalores de  $A_e$  estiverem todos no semiplano complexo da esquerda, então  $\tilde{x} \rightarrow 0$ , o que equivale a  $\hat{x} \rightarrow x$ .

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Problema:

O **problema** consiste em obter  $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T \in \mathbb{R}^n$  que faça com que o modelo dinâmico do erro de estimação do observador, *i.e.*, equação (21), tenha seus polos alocados nas **posições desejadas**, denotadas por

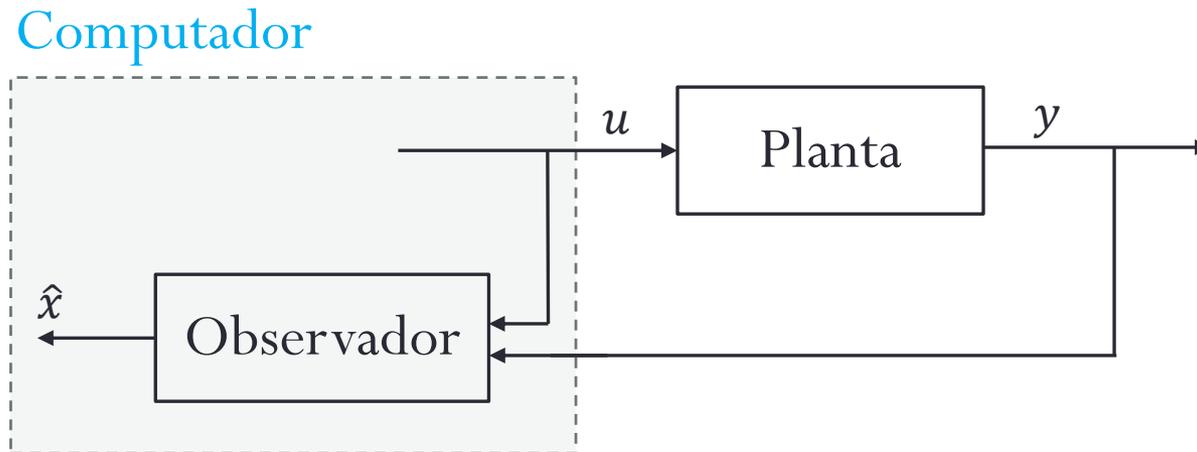
$$s_{o1}, s_{o2}, s_{o3}, \dots, s_{on} \quad (22)$$



## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Comentários:

1. Em diagrama de blocos, o observador fica assim posicionado:



Modelo da Planta:  $\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = Cx$

Equação do observador:  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$  (23)  
 $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

2. O observador linear em (23), com o ganho  $L$  projetado conforme estabelecido pelo problema definido no slide 26 é conhecido como Observador de Luenberger<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> O observador de Luenberger é frequentemente chamado simplesmente de observador de estados.

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### XI.2.2. Solução do Problema

#### Modelo da Dinâmica do Erro de Estimação:

A equação (21), que modela a dinâmica do erro de estimação, é repetida em seguida:

$$\dot{\tilde{x}} = A_e \tilde{x} \quad (21)$$

onde  $A_e \triangleq A - LC$ . O correspondente polinômio característico, chamado de **polinômio característico da dinâmica do erro de estimação**, é definido por

$$\Delta_e(s) \triangleq \det(sI - A + LC) \quad (24)$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Especificações:

Da definição do **problema** no **slide 26**, conclui-se que o polinômio característico correspondente aos **polos desejados**  $s_{o1}, s_{o2}, \dots, s_{on}$  é dado por:

$$\Delta_d(s) \triangleq (s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{on})$$

que pode ser posto alternativamente na forma

$$\Delta_d(s) \triangleq s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (25)$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Ideia da Solução:

A matriz de ganhos do observador

$$L \triangleq \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

deve ser escolhida tal que

$$\Delta_e(s) = \Delta_d(s) \quad (26)$$

onde

$\Delta_e(s)$ : Polinômio característico da dinâmica do erro de estimação, (24).

$\Delta_d(s)$ : Polinômio característico desejado, (25).

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Lema:

Seja uma realização **completamente observável**  $(A, B, C)$  e o correspondente **polinômio característico**:

$$\Delta_{MA}(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

A **mudança de coordenadas**  $x = Qz$ , com  $Q = (W\mathcal{O})^{-1}$ , onde

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad W \triangleq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

...

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

... leva à **realização**

$$\dot{z} = Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bu \quad (27)$$

$$y = CQz \quad (28)$$

em que

$$Q^{-1}AQ \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad Q^{-1}B \triangleq \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ 1 \\ 0_{n-m-1} \end{bmatrix}$$

$$CQ \triangleq [ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 ] \quad (\text{Forma Canônica Observável})$$

*Prova:* vide exercício resolvido A.12.8 do Ogata. ■

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Teorema:

A condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de solução

$$L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$$

para a equação (26) é que o par  $(A, C)$  seja completamente observável.

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

*Prova (Condição Suficiente):*

Considerando que  $(A, C)$  seja completamente observável, podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$x = Qz \quad (29)$$

$$\hat{x} = Q\hat{z} \quad (30)$$

onde  $Q = (W\mathcal{O})^{-1}$  com

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad W \triangleq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

Usando (29) e (30), obtemos o modelo do sistema nas novas coordenadas:

$$\dot{z} = Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bu \quad (31)$$

$$y = CQz \quad (32)$$

e a equação do observador nas novas coordenadas:

$$\dot{\hat{z}} = Q^{-1}AQ\hat{z} + Q^{-1}Bu + Q^{-1}L(y - CQ\hat{z}) \quad (33)$$

De (31), (32) e (33), obtemos o modelo da dinâmica do erro de estimação  $\tilde{z} \triangleq z - \hat{z}$  nas novas coordenadas:

$$\dot{\tilde{z}} = A_e\tilde{z}$$

onde  $A_e \triangleq Q^{-1}AQ - Q^{-1}LCQ$ .

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

Defina

$$\hat{L} \triangleq Q^{-1}L \triangleq [\delta_0 \ \delta_1 \ \dots \ \delta_{n-1}]^T \quad (34)$$

De forma explícita, a **matriz de estado**  $A_e$  pode assim ser escrita na forma:

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - \delta_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - \delta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 - \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

Por outro lado, do polinômio característico desejado

$$\begin{aligned}\Delta_d(s) &\triangleq (s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{on}) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

obtemos a **matriz de estado desejada**  $A_d$  na **FCO**:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

Comparando (35) e (36), obtemos

$$\delta_0 = \alpha_0 - a_0$$

$$\delta_1 = \alpha_1 - a_1$$

...

$$\delta_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1}$$

Por fim, de (34), obtém-se a **matriz de ganho**  $L$ :

$$L = Q[\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]^T \quad (37)$$

desde que  $Q = (W\mathcal{O})^{-1}$  exista, que por vez exige que  $(A, C)$  seja **completamente observável**. ■

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Métodos de Projeto:

Em seguida, apresentamos dois métodos alternativos que poderemos adotar para projetar um observador de estados, como o da equação (19). Esses métodos se baseiam, respectivamente, na prova do teorema do slide 34 e na ideia da alocação de polos expressa pela equação (26).

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Método 1:

Modelo da Planta

$$(A, B, C)$$

Especificações

$$s_{o1}, s_{o2}, \dots, s_{on}$$

1. Verifique se a realização  $(A, C)$  é completamente observável.
2. Calcule a matriz  $Q = (W\mathcal{O})^{-1}$  de mudança de coordenadas que transforma  $(A, B, C)$  na FCO  $(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B, CQ)$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Se  $(A, B, C)$  já estiver na FCO, então  $Q = I$ .

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

3. Obtenha os **coeficientes**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  do **polinômio característico** de **malha aberta**:

$$\Delta_{MA}(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

4. Obtenha os **coeficientes**  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  do **polinômio característico** **desejado**:

$$\begin{aligned}\Delta_d(s) &\triangleq (s - s_{o1}) \dots (s - s_{on}) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

5. Calcule a **matriz de ganhos do observador**:

$$L = Q[\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]^T$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### Método 2:

Modelo da Planta  
 $(A, C, B)$

Especificações  
 $s_{o1}, s_{o2}, \dots, s_{on}$

1. Verifique se a realização  $(A, C)$  é completamente observável.
2. Obtenha o polinômio característico desejado:

$$\begin{aligned}\Delta_d(s) &\triangleq (s - s_{o1}) \dots (s - s_{on}) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

## XI.2. Projeto de Observador de Estados

3. Obtenha o **polinômio característico** da dinâmica do erro de estimação em função dos elementos de  $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T$ :

$$\begin{aligned}\Delta_e(s) &\triangleq \det(sI - A + LC) \\ &= s^n + \beta_{n-1}(L)s^{n-1} + \dots + \beta_1(L)s + \beta_0(L)\end{aligned}$$

4. Calcule os ganhos  $l_1, l_2, \dots, l_n$  resolvendo o seguinte sistema de  $n$  equações algébricas lineares:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \beta_0(L) \\ \alpha_1 &= \beta_1(L) \\ &\dots \\ \alpha_{n-1} &= \beta_{n-1}(L)\end{aligned}$$



## XI.2. Projeto de Observador de Estados

### XI.2.3. Exemplo

#### Servomecanismo de Posição Angular

Seja um servomecanismo de posição angular modelado por

$$G(s) \triangleq \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{2}{s(s+1)}$$

onde  $\Theta(s)$  é a TL do sinal de ângulo e  $T(s)$  é a TL do torque do motor.

Projete um **observador de Luenberger** para estimar as variáveis de estado  $x_1 \triangleq \theta$  e  $x_2 \triangleq \dot{\theta}$  do sistema em questão. Como especificação de desempenho, aloque os polos da dinâmica do erro de estimação em  $s_{o1} = s_{o2} = -10$ .

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

### Planta:

Seja um sistema LIT SISO modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (38)$$

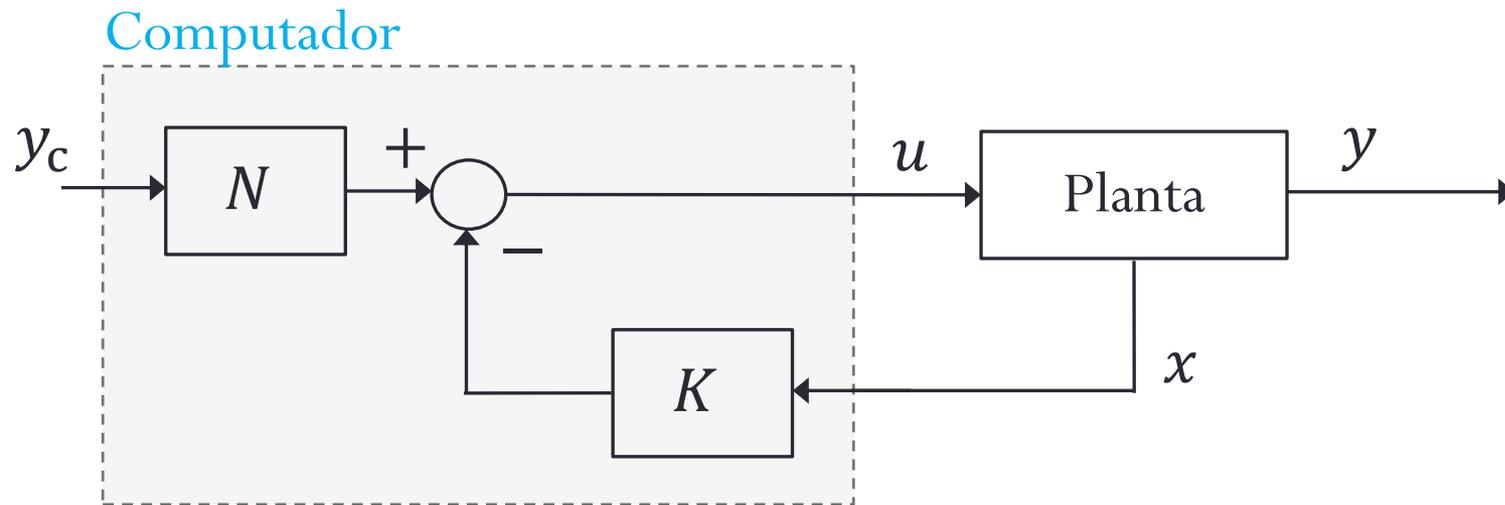
$$y = Cx \quad (39)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor variável de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada,  $y \in \mathbb{R}$  é a saída (medida),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado e  $B \in \mathbb{R}^n$  é a matriz de entrada. Considere que  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam conhecidas e que  $x$  esteja disponível para medição.

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

### Estrutura da Malha de Controle:

Considere que a malha de controle tenha a seguinte **estrutura**:



Do diagrama acima, obtemos a seguinte **lei de controle**:

$$u = -\underset{?}{K}x + \underset{?}{N}y_c \quad (40)$$

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

### Dinâmica em Malha Fechada:

Substituindo (40) em (38), obtemos:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + Ny_c)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BNy_c \quad (41)$$

Logo, a dinâmica do sistema em **malha fechada** é regida pela **matriz de estado**

$$A_{MF} \triangleq A - BK \quad (42)$$

que coincide com a matriz de estado do sistema em malha fechada mediante o **regulador**  $u = -Kx$  (vide slide 8).

Portanto, a matriz  $K$  é projetada exatamente como na [Seção XI.1](#).

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

### Erro em Regime Permanente:

Considere que a entrada de comando seja um **degrau** de amplitude  $R$ :

$$y_c(t) = R \times 1(t)$$

Deseja-se calcular  $N \in \mathbb{R}$  para que, sob esse comando  $y_c(t)$ , o **erro em regime permanente**  $e(\infty) \triangleq y(\infty) - y_c(\infty)$  seja **nulo**.

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

Da especificação acima, vem

$$\begin{aligned}y(\infty) &= y_c(\infty) \\ Cx(\infty) &= R\end{aligned}\tag{43}$$

Por outro lado, em **regime permanente**, a equação (41) se torna

$$\dot{x}(\infty) = (A - BK)x(\infty) + BNR\tag{44}$$

Considerando que  $A - BK$  seja **estável**, temos  $\dot{x}(\infty) = 0$ . Logo, de (44),

$$x(\infty) = -(A - BK)^{-1}BNR\tag{45}$$

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

Por fim, substituindo (45) em (43) e isolando  $N$ , obtemos

$$N = \frac{-1}{C(A - BK)^{-1}B} \quad (46)$$

## XI.3. Projeto de Servocontrolador

**Lema:**

Se  $(A, B, C)$  estiver na FCC e se a correspondente FT for

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

então

$$N = \frac{k_1 + a_0}{b_0} \quad (47)$$

onde  $k_1$  é o primeiro elemento de  $K$ .

*Prova: No quadro.*

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

### Planta:

Seja um sistema LIT SISO modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (48)$$

$$y = Cx \quad (49)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor variável de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada,  $y \in \mathbb{R}$  é a saída (medida),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado,  $B \in \mathbb{R}^n$  é a matriz de entrada e  $C \in \mathbb{R}^n$  é a matriz de saída.

Considere que  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam conhecidas.

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

### Considerações:

1. A matriz de ganhos  $K$  é calculada de forma a alocar os polos da **dinâmica em malha fechada** com a lei  $u = -Kx$  nos pontos

$$s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{cn}$$

2. A matriz de ganhos  $L$  é calculada de forma a alocar os polos da **dinâmica do erro de estimação** nos pontos

$$s_{o1}, s_{o2}, \dots, s_{on}$$

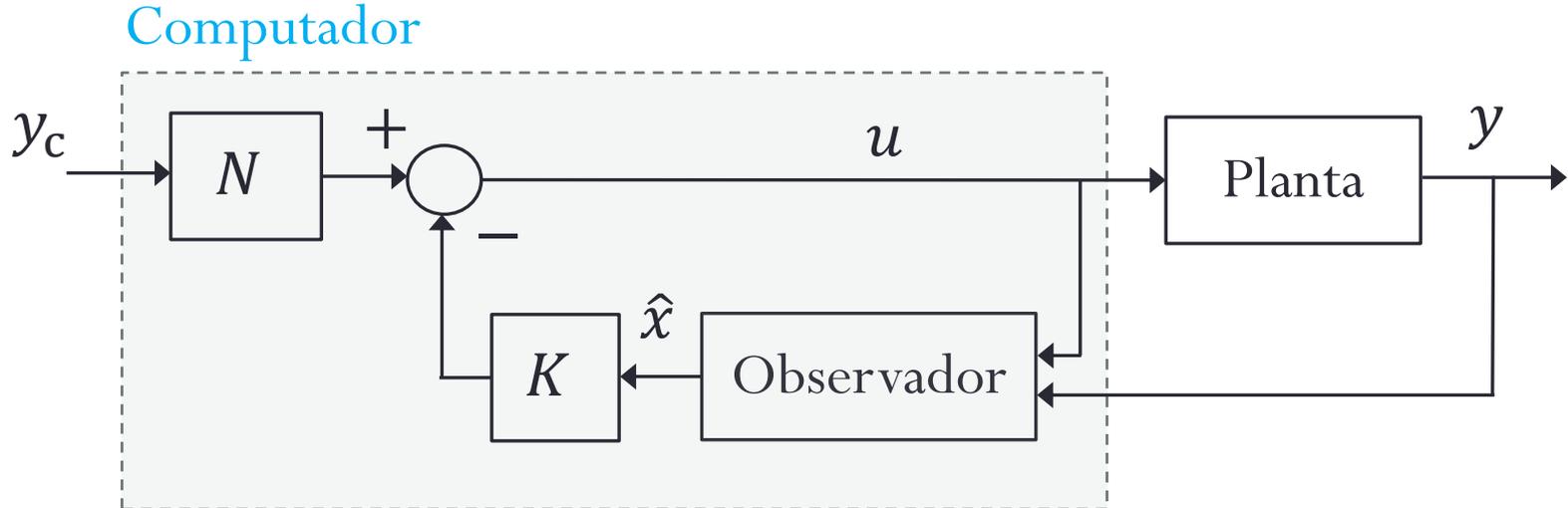
3. O ganho  $N$  é calculado de forma que o **erro em regime permanente** para **comandos do tipo degrau** seja **nulo**. Esse valor é

$$N = \frac{k_1 + a_0}{b_0}$$

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

### Estrutura da Malha de Controle:

Considere que a malha de controle tenha agora a seguinte **estrutura**:



Do diagrama acima, obtemos a seguinte **lei de controle**:

$$u = -K\hat{x} + Ny_c \quad (50)$$

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

Será que ao juntar o observador com o controlador, as respectivas dinâmicas previamente projetadas serão alteradas?

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

### Princípio da Separação:

Considere um sistema modelado por (48)–(49) e a lei de controle dada em (50). Considere ainda que  $(A, B)$  seja completamente controlável e que  $(A, C)$  seja completamente observável.

Substituindo (50) em (48), vem

$$\dot{x} = Ax + B(-K\hat{x} + Ny_c)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + BNy_c \quad (51)$$

Por outro lado, a dinâmica do erro de estimação do observador é

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \quad (52)$$

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

Defina agora o **vetor variável de estado aumentado**:

$$x_+ \triangleq \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \quad (53)$$

De (51), (52) e (53), obtemos o seguinte **modelo dinâmico aumentado**:

$$\dot{x}_+ = \underbrace{\begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0_{n \times n} & (A - LC) \end{bmatrix}}_{\triangleq A_+} x_+ + \begin{bmatrix} BN \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} y_c \quad (54)$$

A **matriz de estado**  $A_+$  descreve as **dinâmicas do sistema em malha fechada** mediante a **lei de controle** dada em (50).

...

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

A correspondente equação característica é

$$\Delta_+(s) \triangleq \det(sI_{2n} - A_+)$$

$$\Delta_+(s) = \underbrace{\det(sI_n - A + BK)}_{\triangleq \Delta_{MF}(s)} \underbrace{\det(sI_n - A + LC)}_{\triangleq \Delta_e(s)}$$

donde conclui-se que

os polos do sistema em malha fechada mediante a lei de controle (50) são

$$s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{cn}, s_{o1}, s_{o2}, \dots, s_{on}.$$

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

### Procedimento:

Portanto, para projetar um servocontrolador com realimentação de estados observados, basta seguir os passos:

1. Calcule  $K$  de forma a alocar os polos de  $A_{MF} = A - BK$  (vide XI.1).
2. Calcule  $L$  de forma a alocar os polos de  $A_e = A - LC$  (vide XI.2).
3. Implemente a malha de controle do slide 55.

## XI.4. Realimentação de Estados Observados

### Exemplo:

Seja um servomecanismo de posição angular modelado por

$$G(s) \triangleq \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{2}{s(s+1)}$$

onde  $\Theta(s)$  é a TL do sinal de ângulo e  $T(s)$  é a TL do torque do motor.

Projete um **servocontrolador**  $u = -K\hat{x} + Ny_c$  para controlar o ângulo  $\theta$  da planta em questão de forma que

- os **polos de malha fechada** (sem o observador) sejam  $s_{c1} = s_{c2} = -2$ ;
- os **polos do observador** sejam  $s_{o1} = s_{o2} = -8$ ; e
- o sistema tenha **erro em regime permanente nulo** sempre que excitado com comandos  $y_c$  do tipo degrau.

Obrigado pela presença  
e atenção!