INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

XII. IMPLEMENTAÇÃO DIGITAL DE CONTROLADORES

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)

Departamento de Mecatrônica

http://www.professordavisantos.com – courses/MPS-43

Novembro/2021

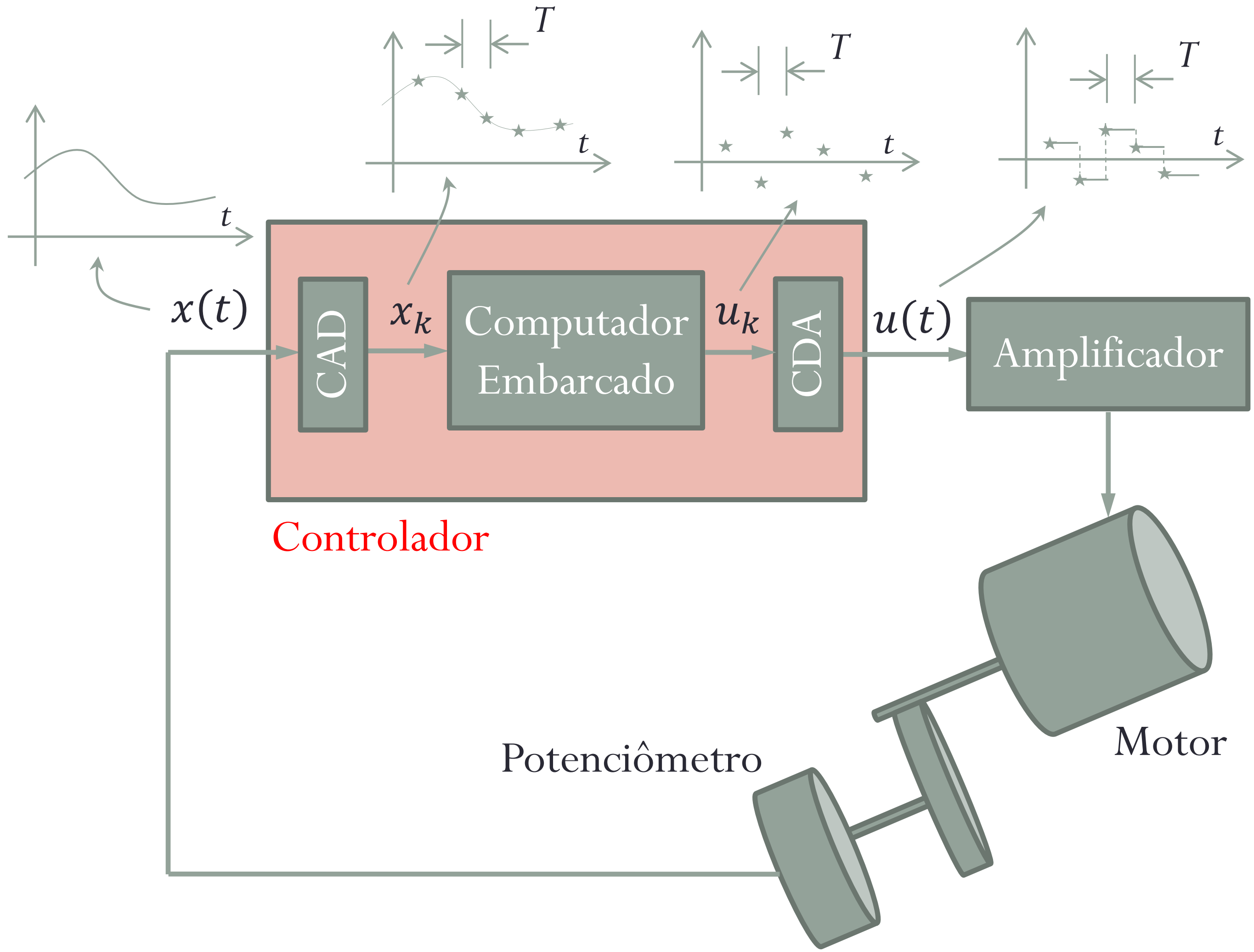
São José dos Campos

Sumário

XII. IMPLEMENTAÇÃO DIGITAL

XII.1. Introdução

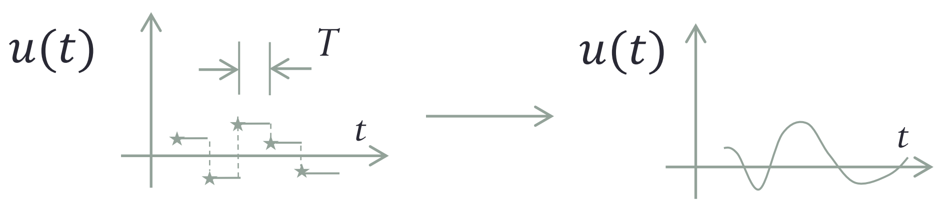
Ideia:



XII.1. Introdução

Comentários:

1. Para um período de amostragem T bem pequeno, $u(t)$ parecerá uma função contínua:



2. O computador calcula u_k por meio de um programa sequencial:

```
Repita:
      t1 = relógio;
      xk = ler(endereço_entrada);
      uk = F(xk) ⟶  Lei de controle em tempo discreto
      escreve(uk,endereço_saída);
      t2 = relógio;
      delay(T-(t2-t1));
Fim_Repita
```

XII.1. Introdução

Vimos os Seguintes Controladores no Curso:

$$C(s) = K_p + K_d s$$ Controlador PD

$$C(s) = K_p + K_d s + K_i/s$$ Controlador PID

$$C(s) = k_c \frac{s+b}{s+a}$$ Controlador LEAD/LAG

…

$$\left.\begin{aligned} u &= -Kx \\ u &= -Kx + Ny_c \\ u &= -K\hat{x} + Ny_c \end{aligned}\right\}$$ Realimentação de estados

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$ Observador de estados

XII.1. Introdução

Como obter a lei de controle discreta no tempo

$$u_k = F(x_k)$$

a partir de leis de controle contínuas no tempo?

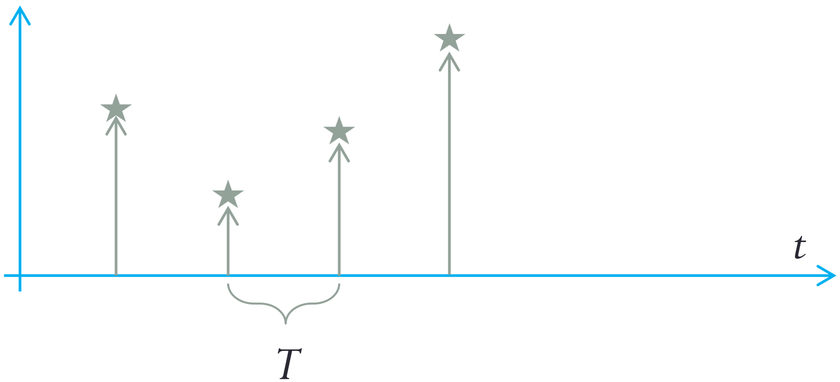
Recordando a Transformada Z …

XII.1. Introdução

Transformada Z:

Modele a variável manipulada discreta no tempo por um trem de impulsos:

$$u^*(t) = u_0\delta(t) + u_1\delta(t-T) + \cdots + u_k\delta(t-kT) + \cdots$$



ou

$$u^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\delta(t-kT) \qquad (1)$$

XII.1. Introdução

Aplicando a transformada de Laplace em (1), obtemos:

$$U^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{-skT} \quad (2)$$

Logo, definindo

$$z \triangleq e^{sT} \quad (3)$$

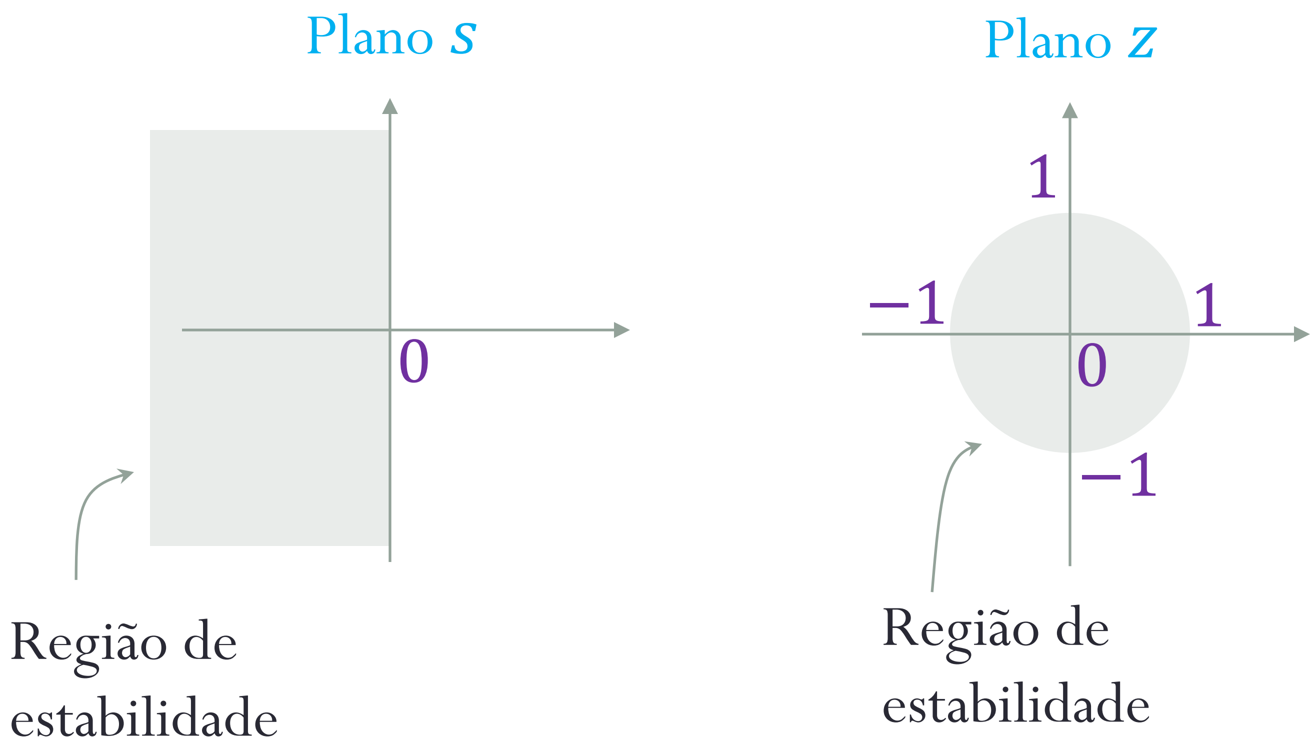
obtemos de (2) a definição da transformada Z:

$$\boxed{U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^{-k}} \quad (4)$$

XII.1. Introdução

Estabilidade no Plano Complexo Z:

$$z \triangleq e^{sT}$$



XII.1. Introdução

Duas Propriedades Importantes:

Linearidade:

$$a x_k + b y_k \Leftrightarrow a X(z) + b Y(z)$$

Deslocamento:

$$x_{k-l} \Leftrightarrow z^{-l} X(z)$$

XII.2. Discretização de Função de Transferência

Transformação de Tustin (bilinear):

É dada pela aproximação de s por:

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \qquad (5)$$

Derivação: no tablet.

XII.2. Discretização de Função de Transferência

Exemplo:

Apresente um algoritmo em pseudolinguagem para a implementação digital da lei de controle

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_d s,$$

usando a transformação de Tustin.

Resolução: no tablet.

XII.2. Discretização de Função de Transferência

Escolha do Período de Amostragem:

O celebrado teorema da amostragem de Nyquist estabelece que, para que seja possível reconstruir um sinal a partir de suas amostras, é necessário amostrá-lo com uma frequência que seja maior do que o dobro da maior frequência desse sinal.

Na prática, no entanto, recomenda-se uma frequência de amostragem de 10 a 20 vezes a maior dentre as frequências de corte das funções de transferência senoidais que modelam os componentes do sistema (planta, sensor e atuadores).

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

Discretização pelo Método ZOH [1]:

Seja o modelo em tempo contínuo de um sistema LIT SISO:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6}$$

$$y = Cx \tag{7}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor variável de estado, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz de estado e $B \in \mathbb{R}^n$ é a matriz de entrada.

[1] *Zero-Order Hold*

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

A aproximação discreta no tempo para (6)-(7) usando o método ZOH é dada por:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k \qquad (8)$$

$$y_{k+1} = C x_{k+1} \qquad (9)$$

onde

$$\Phi \triangleq e^{AT}$$

$$\Gamma \triangleq \int_0^T e^{A\delta} B \, d\delta$$

Prova: no quadro.

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

Regulador em Tempo Discreto:

É dado por:

$$u_k = -Kx_k \tag{10}$$

O modelo em malha fechada obtido de (8) e (10) é:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma(-Kx_k) = (\Phi - \Gamma K)x_k$$

O correspondente polinômio característico (em malha fechada) é:

$$\Delta_{\mathrm{MF}}(z) \triangleq \det(zI - \Phi + \Gamma K)$$

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

Projeto por Alocação de Polos (Regulador):

Calcule o ganho $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ que faça com que

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{MF}}(z) = \Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}(z)}$$

onde

$$\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}(z) \triangleq (z - z_1^c)(z - z_2^c)\ldots(z - z_n^c)$$

e $z_1^c, \ldots, z_n^c$ são as posições especificadas (dentro do círculo unitário) para os polos de malha fechada do sistema compensado.

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

Observador de Luenberger em Tempo Discreto:

É dado por:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \qquad \hat{x}_0 = \bar{x}_0 \tag{11}$$

Definindo o erro de observação $\tilde{x}_k \triangleq x_k - \hat{x}_k$, de (8) e (11) obtemos:

$$\tilde{x}_{k+1} = (\Phi - LC)\tilde{x}_k$$

e, portanto, o polinômio característico do erro de observação é dado por:

$$\Delta_{\mathrm{e}}(z) \triangleq \det(zI - \Phi + LC)$$

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

Projeto por Alocação de Polos (Observador):

Calcule o ganho $L \in \mathbb{R}^n$ que faça com que

$$\Delta_{\mathrm{e}}(z) = \Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{o}}(z)$$

onde

$$\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{o}}(z) \triangleq (z - z_1^o)(z - z_2^o) \dots (z - z_n^o)$$

e $z_1^o, \dots, z_n^o$ são as posições especificadas (dentro do círculo unitário) para os polos da dinâmica do erro de observação.

XII.3. Projeto em Espaço de Estados

Exemplo:

Apresente um algoritmo em pseudolinguagem para implementar digitalmente um servocontrolador com realimentação de estados observados.

Solução: quadro.

Obrigado pela presença

e atenção!