INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

II. REVISÃO DE FUNDAMENTOS

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)

Departamento de Mecatrônica

http://www.professordavisantos.com – courses/MPS-43

Agosto/2022

São José dos Campos

Sumário

II. REVISÃO DE FUNDAMENTOS

II.1. Transformada de Laplace

II.1.1. Definições Preliminares

II.1.2. Propriedades

II.1.3. Transformada Inversa de Laplace

II.1.4. Solução de EDOs Lineares e Invariantes no Tempo

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

II.3. Linearização

II.3.1. Expansão em Série de Taylor

II.3.2. Realimentação

II.4. Diagrama de Blocos

Transformada de Laplace

II.1. Transformada de Laplace

II.1.1. Definições Preliminares

Seja F uma função da variável complexa s. Defina:

1. **Função analítica:** Uma função $F(s)$ é analítica numa região do plano complexo se $F(s)$ e todas as suas derivadas existirem nessa região.
2. **Ponto ordinário:** É um ponto s no qual $F(s)$ é analítica.
3. **Ponto singular:** É um ponto s no qual $F(s)$ não é analítica.
4. **Polo:** É um ponto singular no qual $F(s) \to \infty$.
5. **Zero:** É um ponto s no qual $F(s) = 0$.

II.1.Transformada de Laplace

Por que a Teoria Clássica de Controle utiliza a

Transformada de Laplace,

ao invés da Transformada de Fourier?

II.1. Transformada de Laplace

Transformada de Fourier:

A transformada de Fourier da função $f(t)$ é

$$\Im\{f(t)\} = F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1}$$

e existe se

- $f(t)$ for seccionalmente contínua em todo intervalo finito contido em $-\infty \leq t < \infty$ e
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ convergir. (2)

II.1. Transformada de Laplace

Da definição acima, identificam-se as seguintes inadequações da transformada de Fourier a problemas de controle:

1. as funções temporais que aparecem em sistemas de controle são sempre tais que $f(t) = 0, \forall t < t_0 \geq 0$, de forma que o limite inferior da integral em (1) poderia ser nulo;

2. a condição dada pela equação (2) falha para várias funções de interesse em controle, como o degrau e a rampa.

II.1. Transformada de Laplace

Transformada de Laplace:

A transformada de Laplace da função $f(t)$ é

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (3)$$

onde $s = \sigma + j\omega$, ou seja, é um número complexo.

A integral em (3) converge se

- $f(t)$ é seccionalmente contínua em todo intervalo finito contido em $0 \leq t < \infty$ e
- $\lim_{t \to \infty} |f(t)|e^{-\sigma t} = 0$, para algum $\sigma \in \mathbb{R}$. (4)

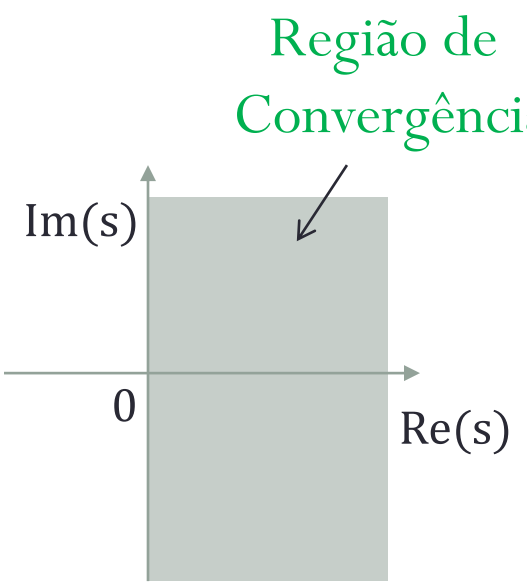
II.1. Transformada de Laplace

Nota-se que, diferentemente da transformada de Fourier,

- o limite inferior da integral em (3) é nulo;
- a condição de convergência dada pela equação (4) é satisfeita para as funções degrau e rampa, $\forall\sigma > 0$, pois:

$$\lim_{t\to\infty} 1e^{-\sigma t} = 0, \forall\sigma > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} te^{-\sigma t} = 0, \forall\sigma > 0.$$

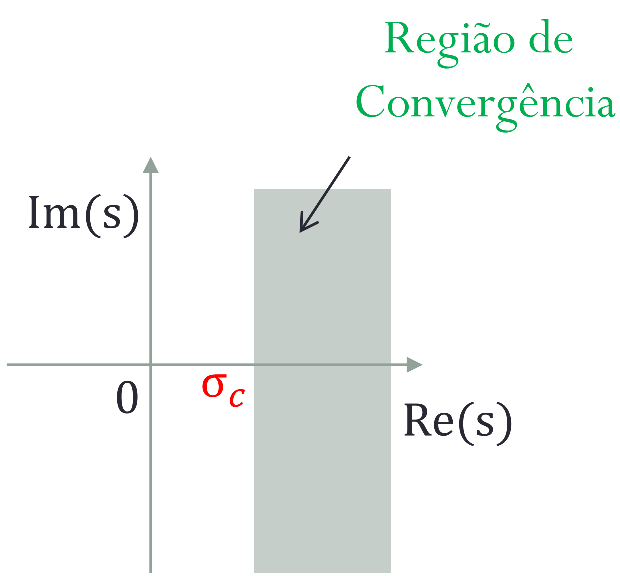


II.1.Transformada de Laplace

Percebe-se que a região de convergência da transformada de Laplace é sempre do tipo:

$$\{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}\colon \sigma > \sigma_c\},$$

em que o limiar σ_c é a abcissa de convergência.



II.1.Transformada de Laplace

Exemplo 1:

Obtenha a transformada de Laplace (TL) e a abcissa de convergência da funcão degrau unitário:

$$f(t) = 1(t) \triangleq \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ 1 & ,t \geq 0 \end{cases}$$

II.1. Transformada de Laplace

Teorema da Extensão (Continuação) Analítica:

Se duas funções complexas são iguais ao longo de um arco finito numa região em que ambas são analíticas, então elas são iguais em qualquer lugar dessa região.

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 2:

Considere as funções

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \,, \forall \sigma > \sigma_c = 0$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s} \,, \forall \sigma \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Como F_1 e F_2 são iguais em qualquer intervalo finito do eixo real positivo, conclui-se que F_1 e F_2 são iguais em todo o eixo real, exceto no ponto de singularidade $s = 0$.

Sendo assim, não nos preocupemos mais com a abcissa de convergência!

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 3:

Obtenha a TL da função exponencial:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & , t \geq 0 \end{cases}$$

II.1.Transformada de Laplace

Exemplo 4:

Obtenha a TL da função exponencial:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} & , t \geq 0 \end{cases}$$

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 5:

Obtenha a TL da função rampa unitária:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t & , t \geq 0 \end{cases}$$

II.1.Transformada de Laplace

Exemplo 6:

Obtenha a TL da função parábola unitária:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & , t \geq 0 \end{cases}$$

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 7:

Obtenha a TL da função seno:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \sin \omega t & , t \geq 0 \end{cases}$$

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 8:

Obtenha a TL da função cosseno:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \cos \omega t & , t \geq 0 \end{cases}$$

II.1. Transformada de Laplace

II.1.2. Propriedades

Superposição:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) \pm \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Derivação:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) \ldots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

Integração:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

II.1. Transformada de Laplace

Deslocamento no Tempo:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)1(t-\tau)\} = F(s)e^{-s\tau}$$

Deslocamento em s:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = F(s-\alpha)$$

Convolução Real:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\}\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Teorema do Valor Inicial:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

II.1. Transformada de Laplace

Teorema do Valor Final:

Se $sF(s)$ não contém nunhum polo com parte real maior ou igual a zero:

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} f(t)}_{\text{Valor final}} = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

II.1.Transformada de Laplace

Exemplo 9:

Calcule o valor final de $f(t)$ para os casos:

1. $F(s) = \frac{5}{s(s^2+s+2)}$

2. $F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

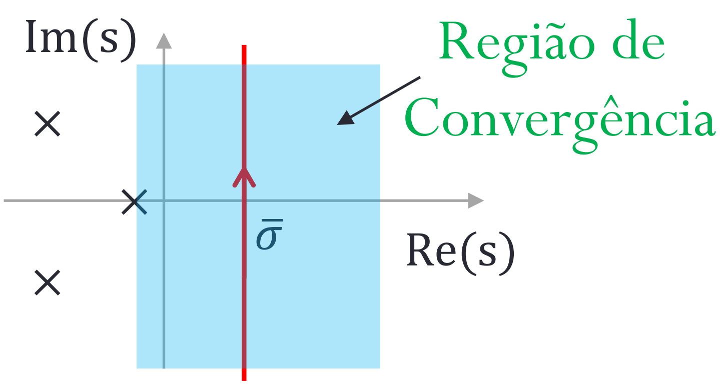
II.1. Transformada de Laplace

II.1.3. Transformada Inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace da função $F(s)$ é

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s)e^{st}ds\ , t > 0, \qquad (5)$$

onde o parâmetro $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}$, que define o caminho de integração, deve ser escolhido maior que as partes reais de todos os polos de $F(s)$.



II.1. Transformada de Laplace

Expansão em Frações Parciais:

Seja a seguinte função racional:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad m < n. \qquad (6)$$

Para calcular a transformada inversa $f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, seguiremos o seguinte procedimento:

- expandir $F(s)$ em franções parciais;
- obter as transformadas dos termos da expansão; e
- somar os termos transformados.

II.1. Transformada de Laplace

Expansão em Frações Parciais - Polos Reais Distintos:

A função

$$F(s) = \frac{Q(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

pode ser expandida como

$$F(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n}$$

com resíduos dados por

$$A_i = \lim_{s \to -p_i} (s+p_i)F(s), \qquad i = 1,2,\ldots,n\,.$$

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 10:

Usando expansão em frações parciais, calcule a transformada inversa da seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

II.1.Transformada de Laplace

Expansão em Frações Parciais - Polos Complexos Conjugados:

A função

$$F(s) = \frac{Q(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

pode ser expandida como

$$F(s) = \frac{A}{s+p} + \frac{A^*}{s+p^*},$$

com resíduos A e A^* tais que

$$A = \lim_{s \to -p} (s+p)F(s)$$

II.1.Transformada de Laplace

Exemplo 11:

Usando expansão em frações parciais, calcule a transformada inversa da seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

II.1. Transformada de Laplace

Expansão em Frações Parciais - Polos Reais Repetidos:

A função

$$F(s) = \frac{Q(s)}{(s+p)^k (s+p_1)\dots(s+p_{n-k})}$$

pode ser expandida como

$$F(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{A_{n-k}}{s+p_{n-k}} + \frac{B_1}{s+p} + \frac{B_2}{(s+p)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(s+p)^k}$$

II.1. Transformada de Laplace

com resíduos dados por

$$A_i = \lim_{s \to -p_i} (s + p_i) F(s), \qquad i = 1, 2, \dots, n - k\,.$$

$$B_{k-i} = \frac{1}{i!} \lim_{s \to -p} \frac{d^i}{ds^i} [(s + p)^k F(s)], \qquad i = 0, 1, \dots, k - 1\,.$$

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 12:

Usando expansão em frações parciais, calcule a transformada inversa da seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

II.1. Transformada de Laplace

II.1.4. Solução de EDOs Lineares e Invariantes no Tempo

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t)$$

C.I.:

$$y(t_0) = y_0$$
$$y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}$$
$$y^{(2)}(t_0) = y_0^{(2)}$$
$$\dots$$
$$y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

II.1. Transformada de Laplace

Solução Usando TL:

1. Transforme a EDO para o domínio s
2. Manipule a equação algébrica resultante de forma a isolar $Y(s)$
3. Expanda $Y(s)$ em frações parciais
4. Aplique a transformada inversa de Laplace

$$\Downarrow$$

$$y(t)$$

II.1. Transformada de Laplace

Exemplo 13:

Usando o método da transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = c\,1(t)$$

$$y(0) = a$$

$$\dot{y}(0) = b$$

II.1.Transformada de Laplace

Vantagens do Método da TL:

1. A transformada de Laplace converte a equação diferencial numa equação algébrica fácil de manipular.

2. Fornece a solução completa (homogênea + particular) numa única operação.

Resposta Impulso e Função de Transferência

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

Seja o sistema modelado por

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots a_1 y^{(1)} + a_0 y = u, \qquad (7)$$

com condições iniciais nulas.

Aplicando a transformada de Laplace em (7), obtém-se

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (8)$$

onde

$$Y(s) \triangleq \mathcal{L}\{y(t)\}$$
$$U(s) \triangleq \mathcal{L}\{u(t)\}$$

A relação (8) também caracteriza o sistema modelado por (7), pois dada uma entrada $U(s)$, ela permite prever a saída $Y(s)$.

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

Função de Transferência:

É definida como a razão entre as transformadas de Laplace da saída e da entrada, considerando que o sistema tenha condições iniciais nulas:

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (9)$$

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

Definições Relacionadas à Função de Transferência:

Seja a função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}.$$

$G(s)$ pode ser classificada como:

1. Estritamente própria: $n > m$
2. Própria: $n = m$
3. Imprópria: $n < m$

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

Outras definições importantes e relacionadas à FT:

1. Polinômio característico: $\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$
2. Equação característica: $\Delta(s) = 0$

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

Resposta Impulso:

Seja um sistema modelado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Para uma entrada do tipo impulso unitário,

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow U(s) = 1$$

e, portanto, nesse caso,

$$Y(s) = G(s) \tag{10}$$

Tomando a transformada inversa de (10), obtém-se

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \tag{11}$$

II.2. Resposta Impulso e Função de Transferência

Pode-se então definir a resposta impulso do sistema:

$$g(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \qquad (12)$$

considerando condições iniciais nulas.

Seja novamente a relação

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Isolando $Y(s)$ e aplicando a transformada inversa,

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

Ou seja, a saída do sistema é a convolução de sua resposta impulso com sua entrada.

Linearização

II.3. Linearização

II.3.1. Método da Expansão em Série de Taylor

Ideia da Linearização por Série de Taylor:

Dado um modelo matemático analítico não linear, sua linearização por série de Taylor consiste em aproximar cada um de seus termos não lineares pela correspondente série de Taylor truncada após o seu termo de primeira ordem.

Observação: Frequentemente esse processo leva a um modelo afim, que claramente não respeita o princípio da superposição e, portanto, não é linear. Neste caso, serão necessárias mudanças de variáveis para obter um modelo de fato linear.

II.3. Linearização

Expansão em Série de Taylor - Função Escalar de uma Variável:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não linear diferenciável. Sua expansão em série de Taylor em torno de $\bar{x}$ é

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})\underbrace{(x - \bar{x})}_{\triangleq\, \delta x} + \cdots$$

II.3. Linearização

Expansão em Série de Taylor - Função Vetorial de Várias Variáveis:

Seja $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função não linear diferenciável. Sua expansão em série de Taylor em torno de $\bar{\mathbf{x}}$ é

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\underbrace{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}_{\triangleq\ \delta\mathbf{x}} + \cdots$$

Jacobiana

II.3. Linearização

Exemplo 14:

Seja uma planta não linear modelada por:

$$\ddot{y} + \alpha \sin y = \beta u,$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída, e α e β são parâmetros.

Usando o método da expansão em série de Taylor, linearize o modelo acima em torno do ponto de referência $y(t) = \bar{y}$ (cte).

II.3. Linearização

Exemplo 15:

Seja uma planta não linear modelada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ é a entrada, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é a saída, e $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ é uma função não linear diferenciável.

Usando o método da expansão em série de Taylor, linearize o modelo acima em torno da trajetória de referência $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t)$ (variante no tempo e diferenciável).

II.3. Linearização

Exemplo 16:

Seja uma planta não linear modelada por:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha \sin x_1 + \beta u$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $x_1 \in \mathbb{R}$ é as saídas, e α e β são parâmetros.

Usando o método da expansão em série de Taylor, linearize o modelo acima em torno da trajetória de referência $x_1(t) = \bar{x}_1(t)$ (variante no tempo e diferenciável).

II.3. Linearização

II.3.2. Método da Realimentação

Seja o sistema modelado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ é a entrada, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é a saída, e $\mathbf{f}$ é uma função vetorial não linear.

Ideia da linearização por realimentação:

Consite em estabelecer uma lei de realimentação do tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

que cancele as não linearidades de $\mathbf{f}$.

II.3. Linearização

Exemplo 17:

Seja uma planta não linear modelada por:

$$\dot{x} = f(x) + \beta u,$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $x \in \mathbb{R}$ é a saída, e β é um parâmetro.

Usando o método de linearização por realimentação, linearize o modelo acima.

II.3. Linearização

Exemplo 18:

Seja a planta não linear modelada por:

$$\ddot{y} + \alpha \sin y = \beta u,$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída, e α e β são parâmetros.

Usando o método de linearização por realimentação, linearize o modelo acima.

Diagrama de Blocos

II.4. Diagrama de Blocos

O que é?

O Diagrama de Blocos (DB) é uma representação das funções dos componentes do sistema, bem como do fluxo de sinais entre eles.

As funções podem ser representadas por:

1. Uma descrição
2. Um modelo matemático (geralmente, uma função de transferência).

II.4. Diagrama de Blocos

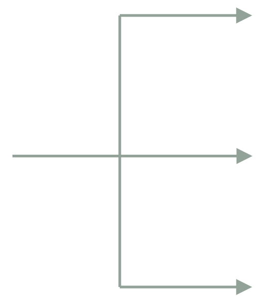
Componentes:

Bloco:

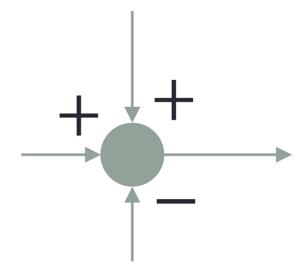
Descrição ou Modelo

Ramo:

Junção:



Ponto de Soma:



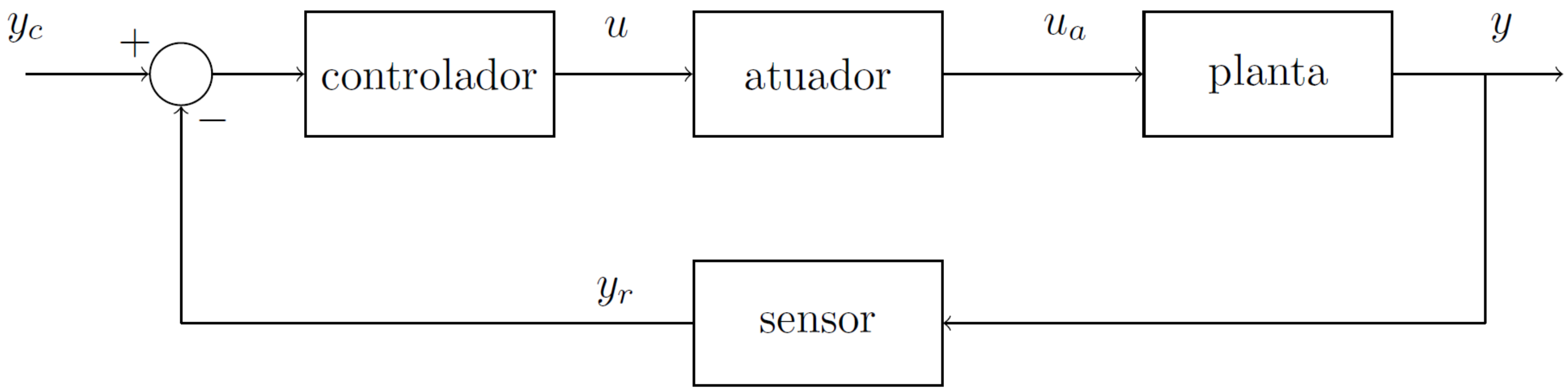
representa uma função do sistema

representa o fluxo de sinais

II.4. Diagrama de Blocos

Exemplo 19:

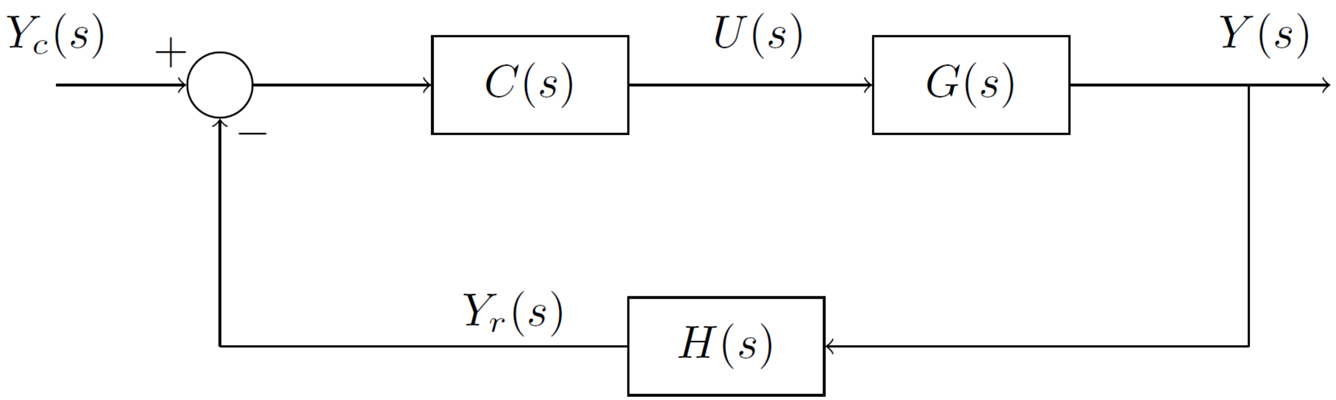
Diagrama de blocos com descrições:



II.4. Diagrama de Blocos

Exemplo 20:

Diagrama de blocos com modelos matemáticos (OBS: é comum embutir o atuador na planta):



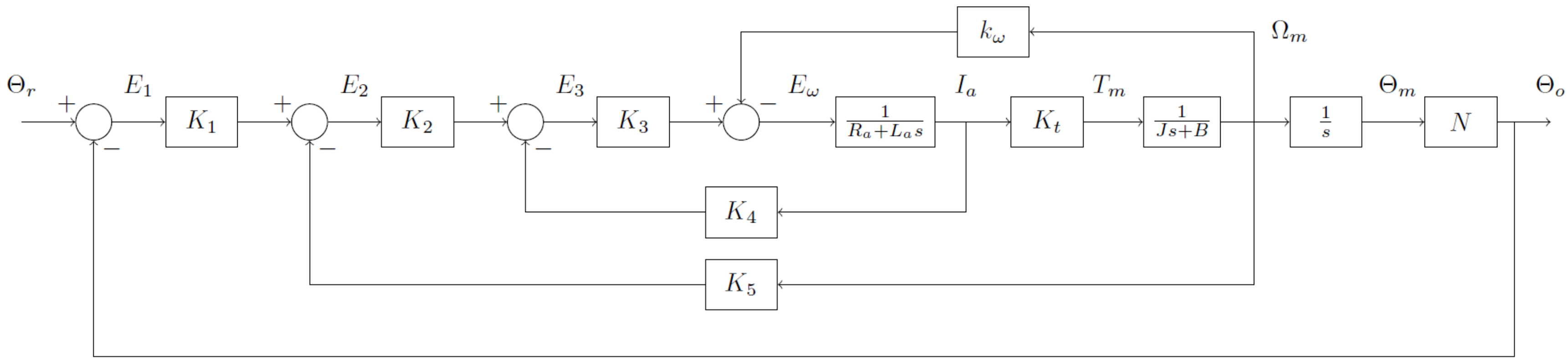
Nesse caso, a relação entre a saída e a entrada de um bloco é a própria função de transferência que representa a sua função. Por exemplo:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = C(s) \qquad \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

II.4. Diagrama de Blocos

Exemplo 21:

Diagrama de blocos com modelos matemáticos:

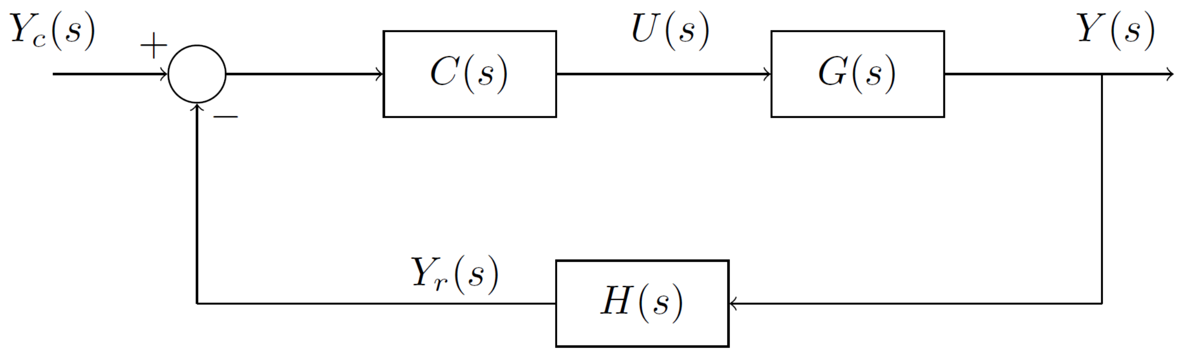


II.4. Diagrama de Blocos

Mais Nomenclatura:

No decorrer do curso, as seguintes funções de transferências serão frequentemente mencionadas:

- Função de Transferência de Percurso Direto: $C(s)G(s)$
- Função de Transferência de Malha Aberta: $C(s)G(s)H(s)$
- Função de Transferência de Malha Fechada: $Y(s)/Y_r(s)$



II.4. Diagrama de Blocos

Exemplo 22:

No DB do Exemplo 21, deduza a função de transferência de malha fechada:

$$M(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)}$$

II.4. Diagrama de Blocos

Fórmula de Mason:

Seja um DB contendo um sinal de entrada Y_i e um sinal de saída Y_o. O ganho (FT) entre Y_i e Y_o pode ser calculado por:

$$\frac{Y_o}{Y_i} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k \,,$$

onde:

N: Número de caminhos diretos entre Y_i e Y_o

P_k: Ganho do k-ésimo caminho direto

...

II.4. Diagrama de Blocos

$\Delta = 1 -$ (soma dos ganhos das malhas individuais) $+$ (soma dos produtos dois a dois dos ganhos das malhas que não se tocam) $-$ (soma dos produtos três a três dos ganhos das malhas que não se tocam) $+ \ldots$

Δ_k : É calculado como o Δ, mas considerando apenas as malhas que não tocam no caminho direto k

II.4. Diagrama de Blocos

Exemplo 23:

No DB do Exemplo 21, deduza a função de transferência de malha fechada:

$$M(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_r(s)}$$

usando a fórmula de Mason.

Obrigado pela presença

e atenção!