INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

IV. ESTABILIDADE DE SISTEMAS LIT

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)

Departamento de Mecatrônica

http://www.professordavisantos.com – courses/MPS-43

Agosto/2022

São José dos Campos

Sumário

IV. ESTABILIDADE DE SISTEMAS LIT

- IV.1. Definições de Estabilidade
  - IV.1.1. Estabilidade BIBO
  - IV.1.2. Estabilidade no Sentido Clássico
- IV.2. Condições de Estabilidade
- IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade
  - IV.3.1. Solução da Equação Característica
  - IV.3.2. Critério de Routh-Hurwitz
  - IV.3.3. Critério de Estabilidade de Nyquist

Definições de Estabilidade

IV.1. Definições de Estabilidade

IV.1.1. Estabilidade BIBO

Seja um sistema com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$. Considere condições iniciais nulas. O sistema em questão é dito BIBO[1] estável se,

> Para toda entrada $u(t)$ limitada, sua saída $y(t)$ se mantém limitada.

[1] *Bounded input, bounded output*.

IV.1. Definições de Estabilidade

IV.1.2. Estabilidade (no sentido clássico)

Seja um sistema LIT com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ modelado por

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

com CIs $y(t_0) = y_0, y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$.

O sistema em questão é dito estável (no sentido clássico) se, para $u(t) \equiv 0$,

1. $|y(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq t_0$
2. $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$

Condições de Estabilidade

IV.2. Condições de Estabilidade

Condição 1 (estabilidade BIBO):

O sistema LIT modelado pela resposta impulso $g(t)$ é BIBO estável se e somente se

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)|\, d\tau \leq Q < \infty.$$

Caso contrário, o sistema é dito instável.

IV.2. Condições de Estabilidade

Condição 2 (estabilidade BIBO):

Para que a Condição 1 seja satisfeita, é necessário e suficiente que

Os polos de $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ estejam todos localizados no semiplano complexo da esquerda

IV.2. Condições de Estabilidade

Condição 3 (estabilidade no sentido clássico):

Seja um sistema LIT modelado por

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

com CIs $y(t_0) = y_0, y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$.

Esse sistema é estável (no sentido clássico) se e somente se

$$Re\{\lambda_i\} < 0, i = 1, \ldots, n$$

onde $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ são os autovalores do sistema. Caso contrário o sistema é dito instável.

IV.2. Condições de Estabilidade

...

Adicionalmente, se o sistema tem autovalores no eixo $j\omega$, então ele é dito marginalmente estável (ou está no limiar de estabilidade).

Determinação de Estabilidade

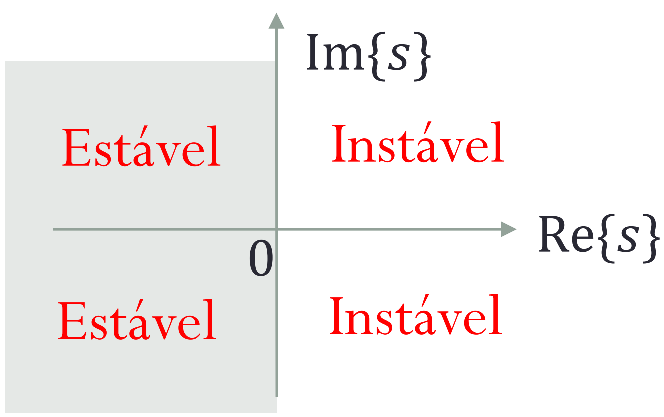
IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

IV.3.1. Solução da Equação Característica

Seja um sistema LIT modelado por

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)}, \qquad n > m.$$

Os métodos de determinação de estabilidade de $G(s)$ buscam pela localização dos polos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no plano complexo s.



IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Método direto:

Consiste em solucionar a equação característica

$$\Delta(s) \triangleq (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s+\lambda_n) = 0$$

e verificar diretamente a localização das raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que a satisfaz.

Desvantagem: trabalhoso para sistemas de ordem elevada.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

IV.3.2. Critério de Routh-Hurwitz

Seja um sistema LIT com polinômio característico

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0.$$

Para que $\Delta(s) = 0$ não tenha raízes no semiplano complexo da direita, é necessário que

- os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ tenham todos o mesmo sinal;
- nenhum dos coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ se anule.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Critério de Routh-Hurwitz (condição necessária e suficiente):

A equação característica $\Delta(s) = 0$ possue todas as raízes no semiplano complexo da esquerda se e somente se não há troca de sinais na primeira coluna da tabela de Hurwitz:

Coeficientes de $\Delta(s)$

$$
\begin{array}{lccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & \cdots & & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & & \\
\cdots & & & & & \\
s^2 & q_1 & q_2 & & & \\
s^1 & r_1 & & & & \\
s^0 & z_1 & & & &
\end{array}
$$

Primeira coluna

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

onde

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad \text{etc.}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1} \qquad \text{etc.}$$

e assim por diante. O critério de Routh-Hurwitz diz ainda que:

> O número de mudanças de sinal na primeira coluna é igual ao número de raízes de $\Delta(s) = 0$ no semiplano complexo da direita.

[No Ogata, os Problemas A5.9 e A5.10 apresentam uma prova matemática do critério de Routh-Hurwitz.]

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 1:

Seja um sistema com equação característica dada por

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0.$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, analise a estabilidade desse sistema (diga se ele é estável ou não) e, caso seja instável, determine quantos polos há no semiplano complexo da direita.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Caso Particular 1:

Se apenas o primeiro elemento de uma linha da tabela for nulo, esse é substituído por $\varepsilon > 0$ para completar a tabela:

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & 0 \rightarrow \varepsilon & b_2 & \cdots & & \\
s^{n-3} & & & & & \\
\cdots & & & & &
\end{array}
$$

O critério de Routh-Hurwitz ainda estabelece que:

Se não houver mudanças de sinal na primeira coluna, o sistema contém um par de polos imaginários (limiar de estabilidade).

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Nesse caso, pode-se determinar a localização do par de polos imaginários resolvendo-se a equação auxiliar:

$$P(s) \triangleq a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} \dots = 0,$$

em que o polinômio auxiliar $P(s)$ é aquele formado pelos coeficientes da linha imediatamente acima do elemento que anulou.

Caso de fato haja um par de polos imaginários, $P(s)$ terá grau 2.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 2:

Seja um sistema com equação característica dada por:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0.$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, analise a estabilidade desse sistema. Caso seja instável, determine quantos polos há no semiplano complexo da direita. Caso esteja no limiar de estabilidade, determine a localização do seu par de polos imaginários.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 3:

Seja um sistema com equação característica dada por:

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0.$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, analise a estabilidade desse sistema. Caso seja instável, determine quantos polos há no semiplano complexo da direita. Caso esteja no limiar de estabilidade, determine a localização do seu par de polos imaginários.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Caso Particular 2:

Se uma linha da tabela se anula completamente, para completa-la, substitui-se essa linha pela derivada do polinômio auxiliar $P(s)$, correspondente à linha imediatamente acima:

$$
\begin{array}{llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\
s^{n-2} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cdots \\
 & & & \\
\cdots & & &
\end{array}
$$

$$P(s) = a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} \ldots$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = (n-1)a_{n-1}s^{n-2} + (n-3)a_{n-3}s^{n-4} \ldots$$

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Caso não haja mudanças de sinal na primeira coluna do arranjo, o critério de Routh-Hurwitz ainda estabelece que a equação característica tem raízes imaginárias (pode ser mais de um par) dadas pela solução da equação auxiliar:

$$P(s) = 0$$

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 4:

Seja um sistema com equação característica dada por:

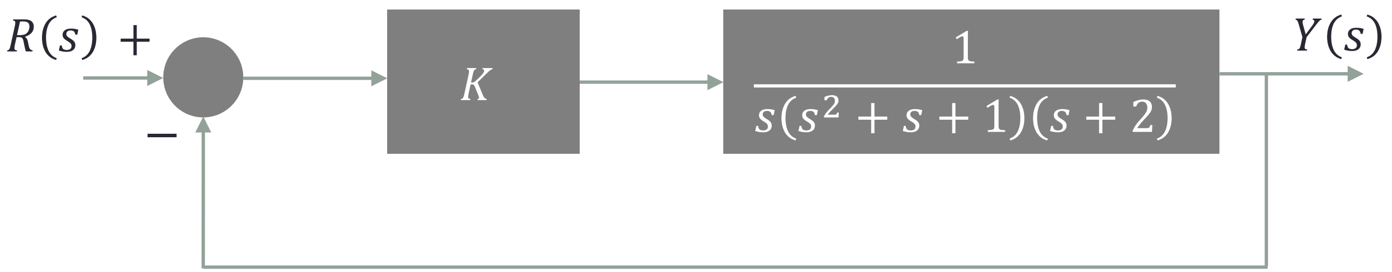
$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50 = 0.$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz, analise a estabilidade desse sistema. Caso seja instável, determine quantos polos há no semiplano complexo da direita. Caso esteja no limiar de estabilidade, determine a localização do(s) seu(s) par(es) de polos imaginários.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 5 (Aplicação em Sistemas de Controle):

Seja o sistema de controle em MF:

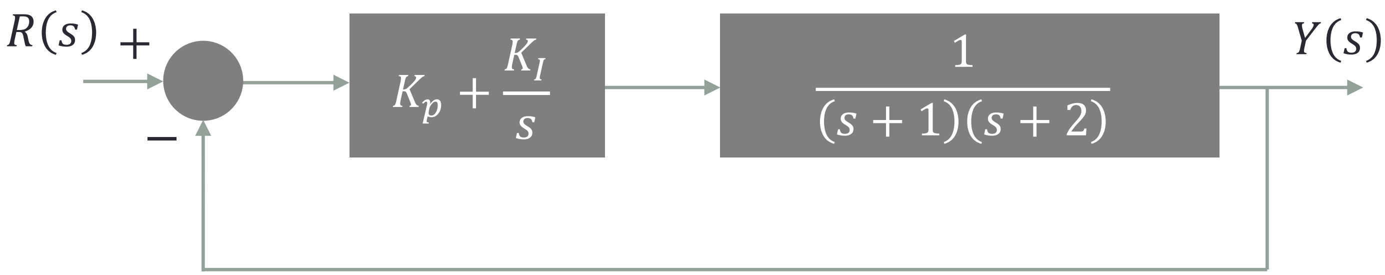


Determine o(s) intervalo(s) de valores de K para o(s) qual(is) esse sistema é estável.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 6 (Aplicação em Sistemas de Controle):

Seja o sistema de controle em MF:



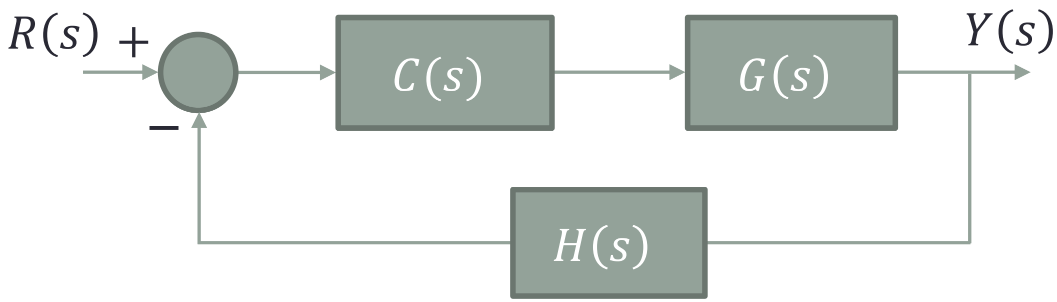
Determine a região dos parâmetros (K_P, K_I) para os quais esse sistema é estável. Represente essa região graficamente no plano $K_P - K_I$.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

IV.3.3. Critério de Estabilidade de Nyquist

Definição do Problema:

Seja o sistema de controle em MF da figura:



- Função de transferência da malha: $L(s) = C(s)G(s)H(s)$
- Função de transferência de MF: $M(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + L(s)}$ $\triangleq \Delta(s)$

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

O problema consiste em, a partir do conhecimento de $L(s)$, determinar a quantidade de polos de $M(s)$ localizados no semiplano da direita (SPD) do plano s.

Observações:

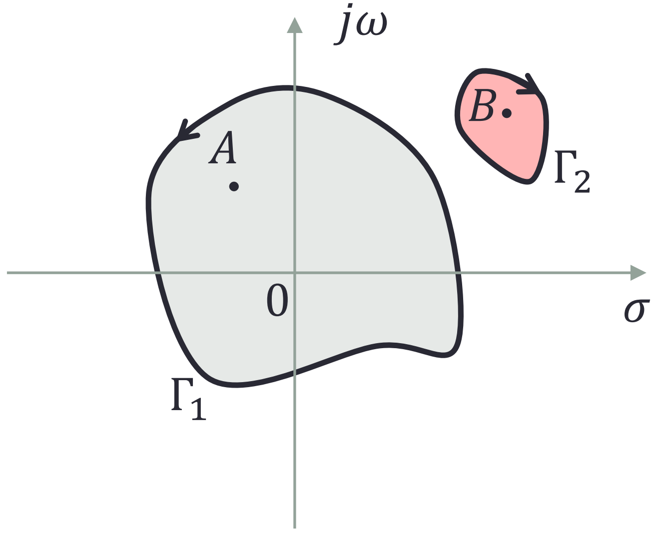
- Não requer a determinação direta dos polos de $M(s)$
- Informações necessárias:

  1) polos e zeros de $L(s)$; e
  2) diagrama de Nyquist de $L(s)$.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Definições Preliminares:

Contornos fechados e envolvimentos

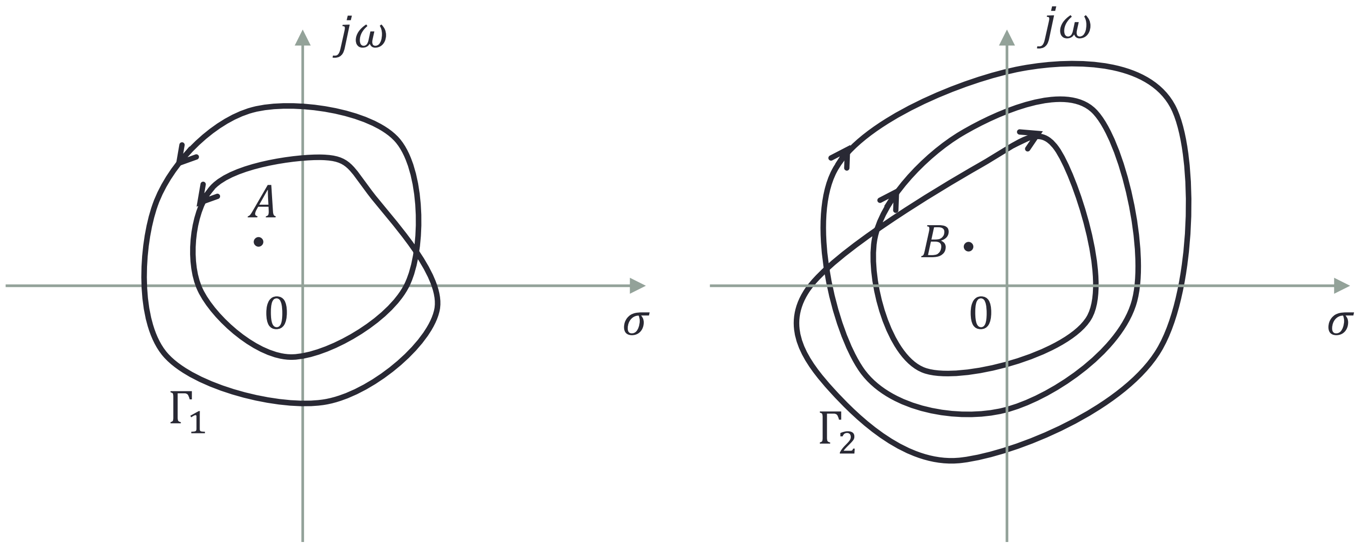


- O ponto A está envolvido pelo contorno fechado Γ_1 no sentido anti-horário.
- O ponto B está envolvido pelo contorno fechado Γ_2 no sentido horário.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Número de envolvimentos (N)

- Sentido horário: N positivo
- Sentido anti-horário: N negativo



- O ponto A está envolvido $N = -2$ vezes pelo contorno Γ_1
- O ponto B está envolvido $N = +3$ vezes pelo contorno Γ_2

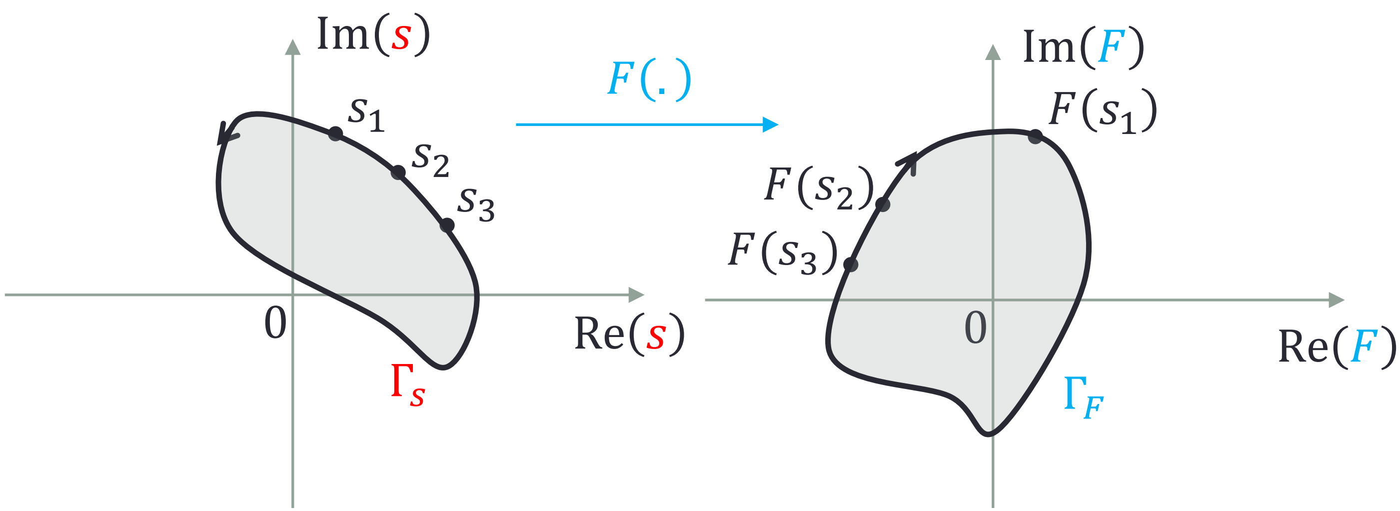
IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Princípio do Argumento:

Seja a função racional

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}, \qquad n > m \qquad (1)$$

Considere um contorno fechado Γ_s no plano complexo s e seu mapeamento Γ_F no plano complexo $F(s)$:



IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Note que:

- A forma e o sentido de Γ_F dependem da função $F(s)$ em questão;
- Caso queiramos que Γ_F seja fechado, é necessário supor que Γ_s não passa por nenhum dos polos $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ de $F(s)$;
- Caso queiramos (e vamos querer) que Γ_F não passe pela origem, é necessário supor que Γ_s não passa por nenhum dos zeros $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ de $F(s)$.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Princípio do Argumento

Seja a função $F(s)$ da equação (1). Suponha um contorno fechado Γ_s, escolhido no plano s, com sentido horário, que não passe por zeros ou polos de $F(s)$. Denote por Γ_F o contorno fechado no plano $F(s)$ resultante do mapeamento de Γ_s nesse plano. O Princípio do Argumento diz que:

> Γ_F envolve a origem do plano $F(s)$ $N = Z - P$ vezes

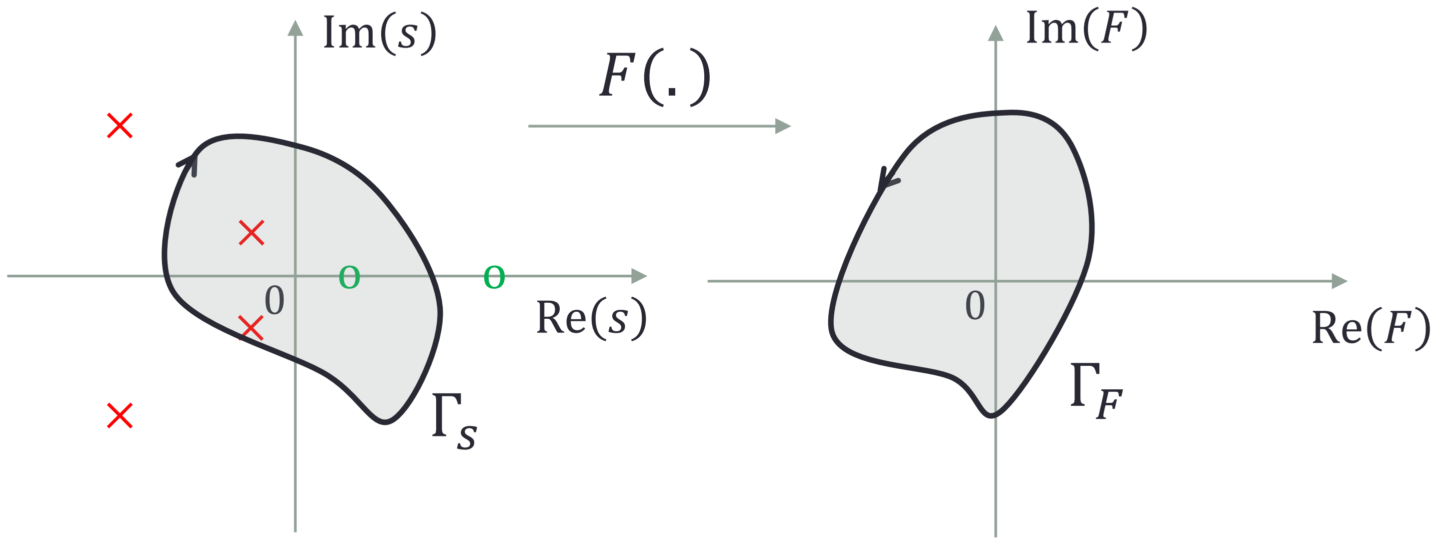
onde:

Z: número de zeros de $F(s)$ envolvidos por Γ_s

P: número de polos de $F(s)$ envolvidos por Γ_s

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 1:



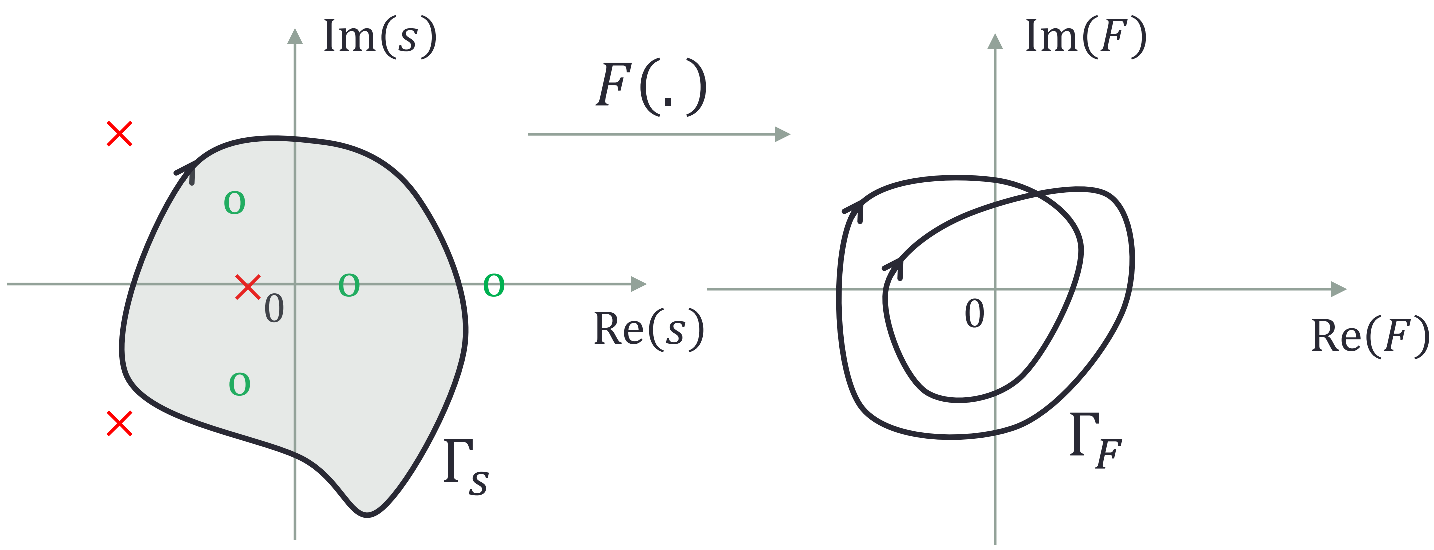
$Z = 1$

$P = 2$

$N = -1$

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 2:



$Z = 3$

$P = 1$

$N = +2$

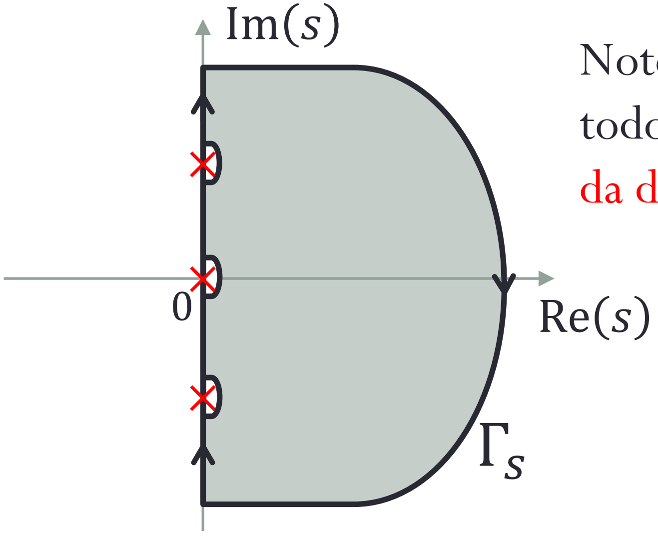
IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Critério de Nyquist para Sistemas LIT:

Consiste numa aplicação imediata do Princípio do Argumento, fazendo $F(s)$ igual ao polinômio característico:

$$F(s) = 1 + L(s)$$

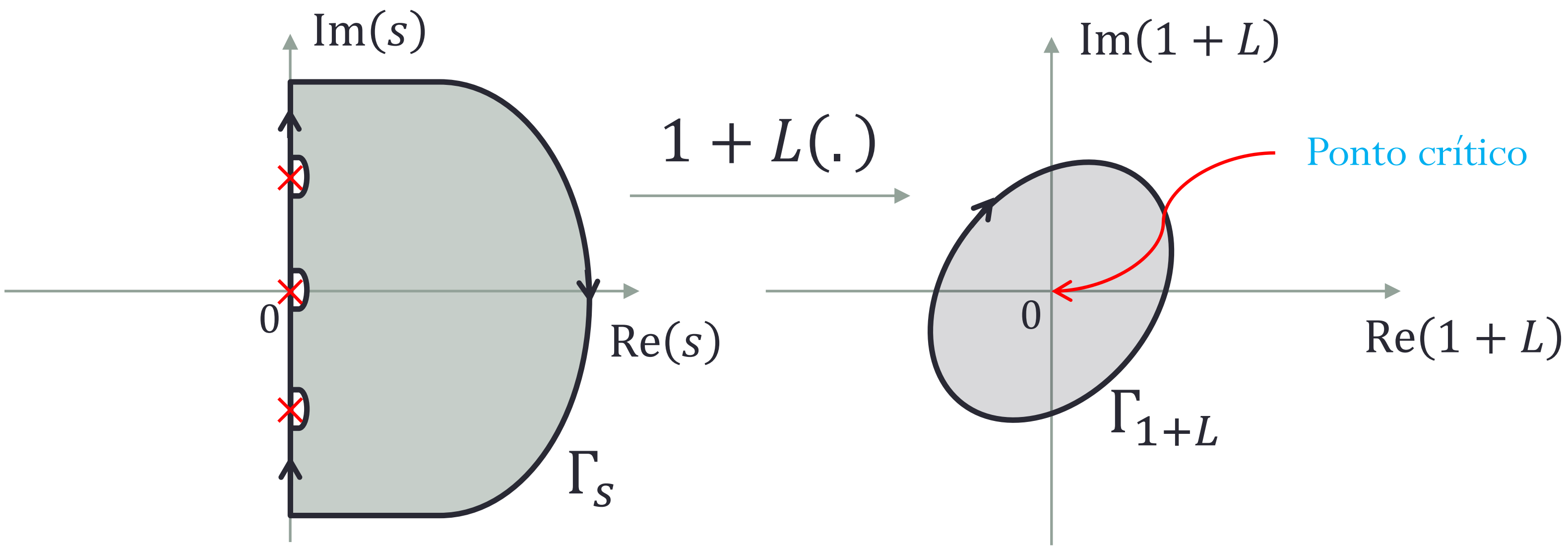
e escolhendo Γ_s como sendo o chamado contorno de Nyquist:



Note que este contorno envolve todo o semiplano complexo da direita (SCD) no sentido horário.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Neste caso, temos:



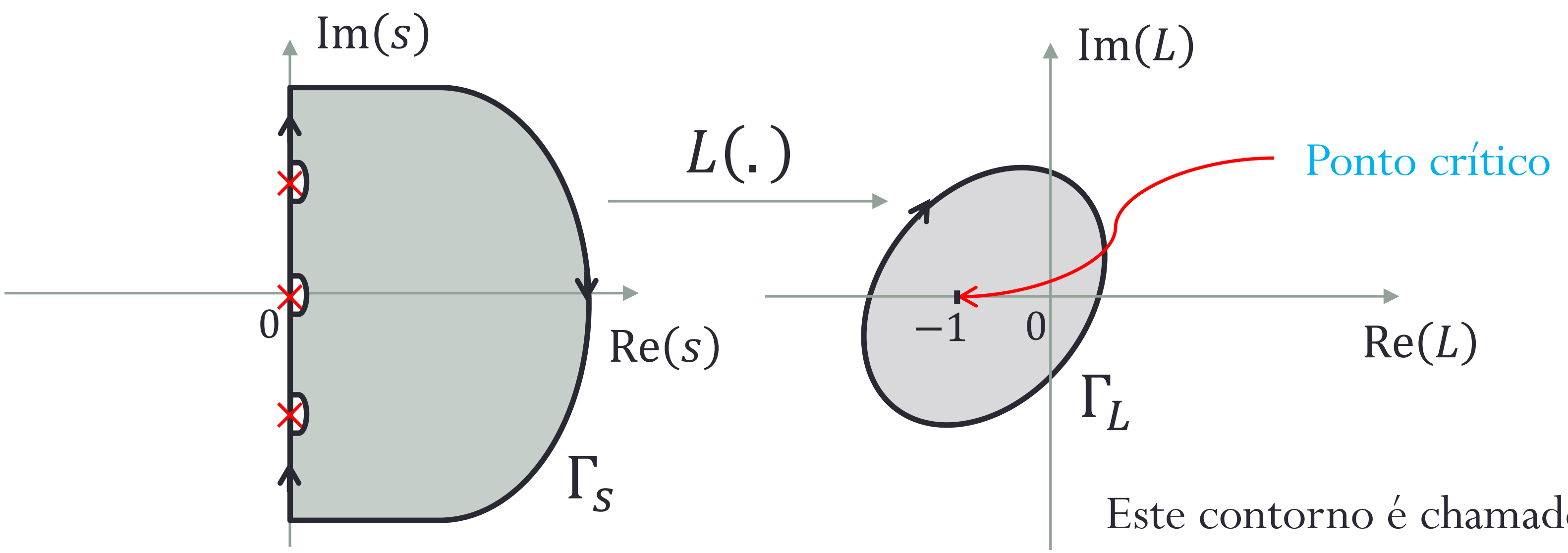
$$N = Z - P$$

P: número de polos de $1 + L(s)$ no SPD = número de polos de $L(s)$ no SPD

Z: número de zeros de $1 + L(s)$ no SPD = número de polos de $M(s)$ no SPD

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Note que a origem do plano $1 + L(s)$ corresponde ao ponto -1 do plano $L(s)$. Dessa forma, pode-se usar o contorno Γ_L em vez de Γ_{1+L}, bastando para tal, trocar o ponto crítico da origem para o ponto -1.



Este contorno é chamado de Diagrama de Nyquist

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Critério de Nyquist

O número de polos de $M(s)$ localizados no SPD é dado por:

$$\boxed{Z = N + P}$$

onde:

N: número de envolvimentos do ponto -1 do plano $L(s)$ pelo contorno Γ_L,

P: número de polos de $L(s)$ localizados no SPD.

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 3:

Seja o sistema LIT em malha fechada com função de transferência de malha aberta dada por

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+0{,}5)}$$

Analise a estabilidade desse sistema (diga se é estável ou não) e, caso seja instável, determine a quantidade de polos de malha fechada no SPD.

Diagrama de Nyquist:

IV.3. Métodos de Determinação de Estabilidade

Exemplo 4:

Seja o sistema LIT em malha fechada com função de transferência de malha aberta dada por

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

Analise a estabilidade desse sistema e, caso seja instável, determine a quantidade de polos de malha fechada no SPD.

Diagrama de Nyquist:

Obrigado pela presença

e atenção!