



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

V. ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)

Departamento de Mecatrônica

<http://www.professordavisantos.com> — **courses/MPS-43**

Agosto/2022
São José dos Campos

Sumário

V. ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO

V.1. Introdução

V.2. Sinais de Teste

V.3. Especificação de Desempenho em Regime Transitório

V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Introdução

V.1. Introdução

Resposta Temporal da Saída do Sistema:

Em geral, é dada por

$$y(t) = y_T(t) + y_P(t), \quad t \geq t_0,$$

onde $y_T(t)$ é a resposta em regime transitório (transiente) e $y_P(t)$ é a resposta em regime permanente (estacionário).

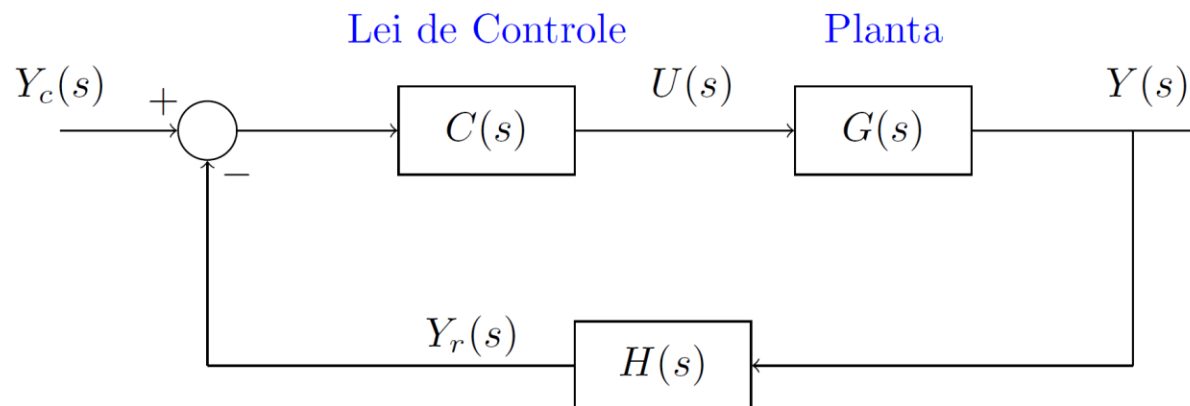
Considera-se neste capítulo que os sistemas sejam estáveis. Nesse caso,

$$y_P(t) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

V.1. Introdução

Importância em Projetos de Sistemas de Controle:

Seja o sistema de controle modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



No **projeto** desse sistema, deve-se dimensionar a lei de controle $C(s)$ de forma que $y(t)$ se aproxime adequadamente de $y_c(t)$, tanto no **regime transitório** quanto no **regime permanente**.

Sinais de Teste

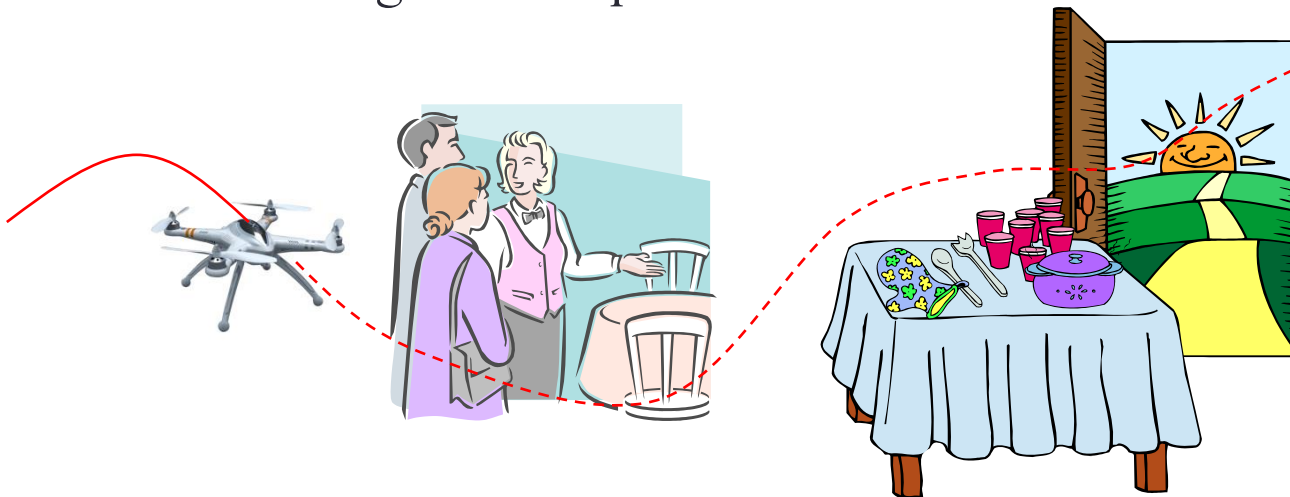
V.2. Sinais de Teste

Motivação:

Geralmente, não se pode prever os comandos a que um sistema será submetido durante sua operação.

Exemplo:

Quadricíptero em movimento num ambiente desconhecido ou que se modifica ao longo do tempo.



V.2. Sinais de Teste

... Nesse caso

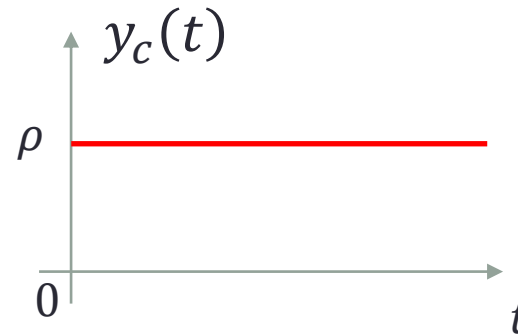
Comandos-padrão de teste são adotados com o intuito de **sistematizar a avaliação** de desempenho de sistemas de controle.

V.2. Sinais de Teste

Sinal (do tipo) Degrau:

$$y_c(t) = \begin{cases} \rho, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$Y_c(s) = \frac{\rho}{s}$$



Observações:

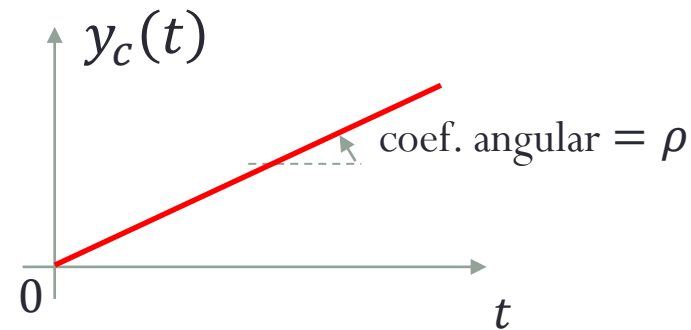
1. Em especial, se $\rho = 1$, $y_c(t) = 1(t)$ (**degrau unitário**);
2. Testes com **sinal degrau** revelam informações sobre a resposta do sistema a **mudanças abruptas** na entrada de comando.

V.2. Sinais de Teste

Sinal (do tipo) Rampa:

$$y_c(t) = \begin{cases} \rho t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$Y_c(s) = \frac{\rho}{s^2}$$



Observações:

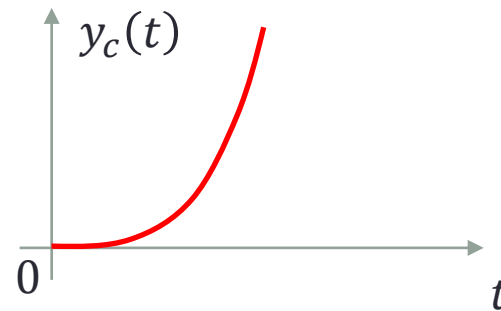
1. Em especial, se $\rho = 1$, $y_c(t) = t1(t)$ (**rampa unitária**);
2. Útil para testar **sistemas de controle de posição** que devem, em partes da missão, movimentar-se com **velocidade constante**;
3. Se o sistema de controle não for capaz de acompanhar o comando de velocidade, o erro de posição aumentará com o tempo.

V.2. Sinais de Teste

Sinal Parabólico:

$$y_c(t) = \begin{cases} \frac{\rho}{2} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$Y_c(s) = \frac{\rho}{s^3}$$



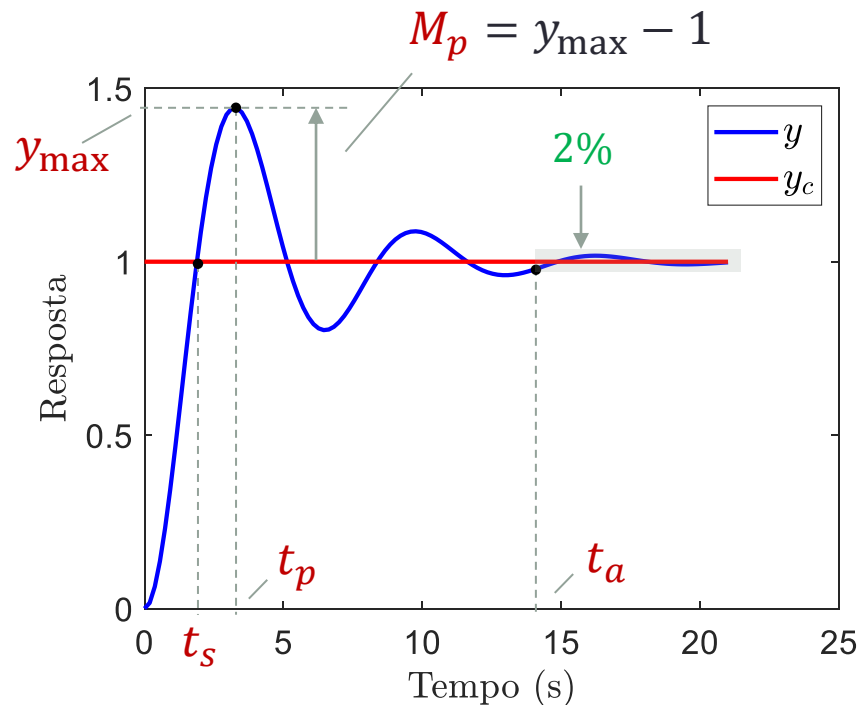
Observações:

1. Em especial, se $\rho = 1$, $y_c(t) = \left(\frac{t^2}{2}\right) 1(t)$ (**parábola unitária**);
2. Útil para testar **sistemas de controle de posição** que devem, em partes da missão, movimentar-se com **aceleração constante**.

Especificação de Desempenho Transitório

V.3. Especificação de Desempenho em Regime Transitório

Geralmente, **caracterizamos o regime transitório** considerando que a entrada de comando $y_c(t)$ seja um **degrau unitário**. A saída $y(t)$ resultante é tipicamente da forma:



t_s : tempo de subida

t_p : tempo de pico

t_a : tempo de acomodação

y_{\max} : pico da resposta

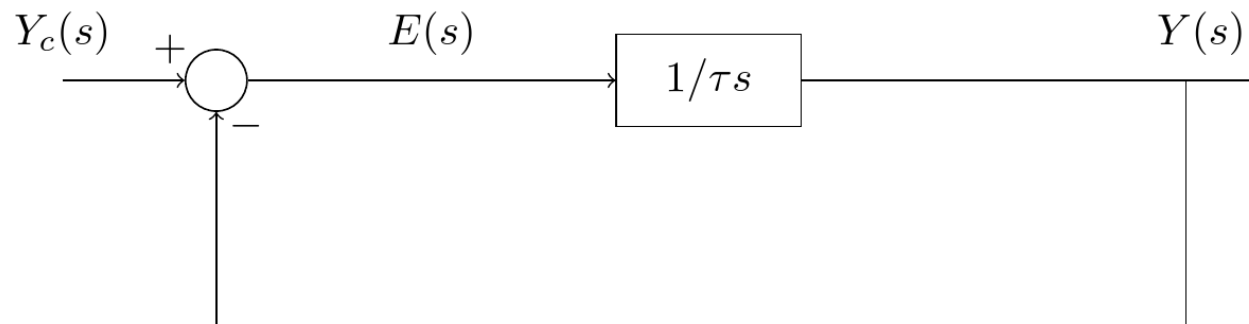
M_p : máxima ultrapassagem

Resposta Transitória: Sistemas de Primeira Ordem

V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Sistema:

Seja o sistema LIT de primeira ordem modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{1/(\tau s)}{1 + 1/(\tau s)} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad (1)$$

onde τ é a constante de tempo do sistema.

V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Resposta ao Degrau Unitário:

Considerando $Y_c(s) = \frac{1}{s}$, temos $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}$ e, portanto, a resposta temporal:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right\} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0,$$

e a respectiva derivada temporal:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0.$$

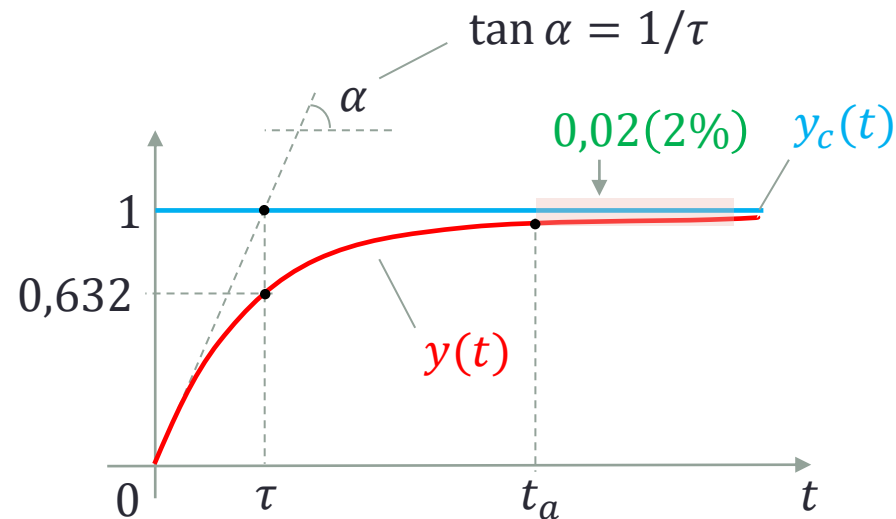
V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

O tempo de acomodação t_a da saída $y(t)$ em torno de uma faixa de 2% do valor final é tal que

$$1 - 0,02 = 1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} \Rightarrow \ln 0,02 = -\frac{t_a}{\tau}$$

$$t_a \approx 3,91\tau$$

Graficamente,



V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Resposta à Rampa Unitária:

Considerando $Y_c(s) = 1/s^2$ em (1), obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{-\tau}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{\tau}{s + 1/\tau}$$

e, portanto,

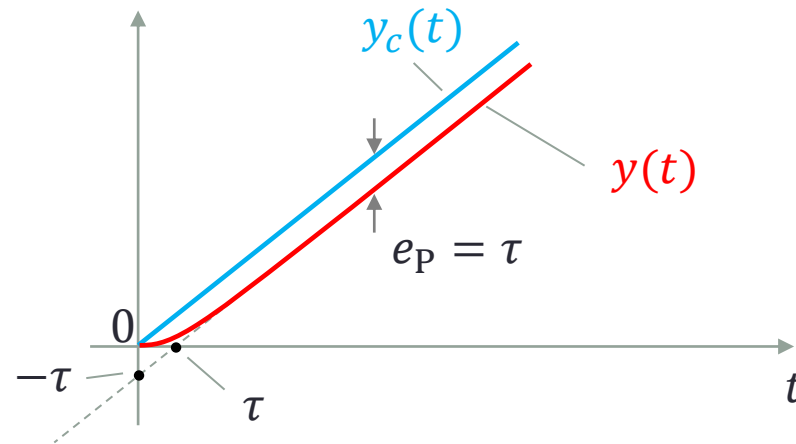
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\tau}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{\tau}{s + 1/\tau} \right\} = -\tau + t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0.$$

Note que há um erro em regime permanente dado por

$$e_p = \tau.$$

V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Graficamente,



V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Resposta ao Impulso Unitário:

Considerando $Y_c(s) = 1$ em (1), obtemos

$$Y(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

e, portanto,

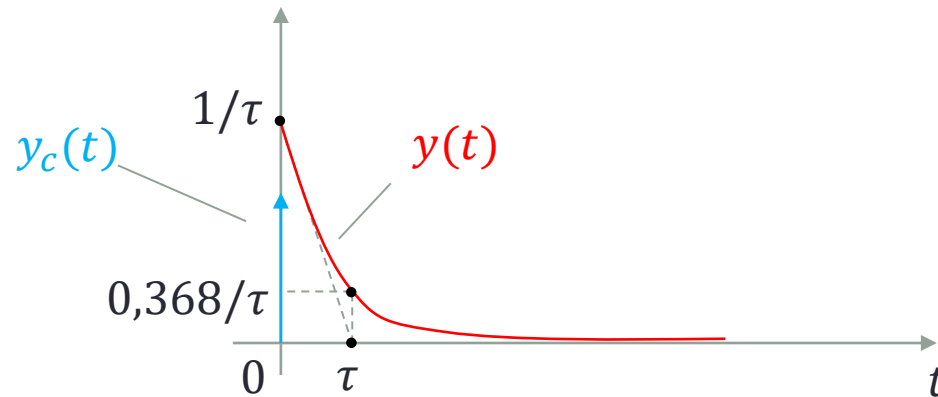
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \right\} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0.$$

e a sua derivada temporal

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0.$$

V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Graficamente,



V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Observação:

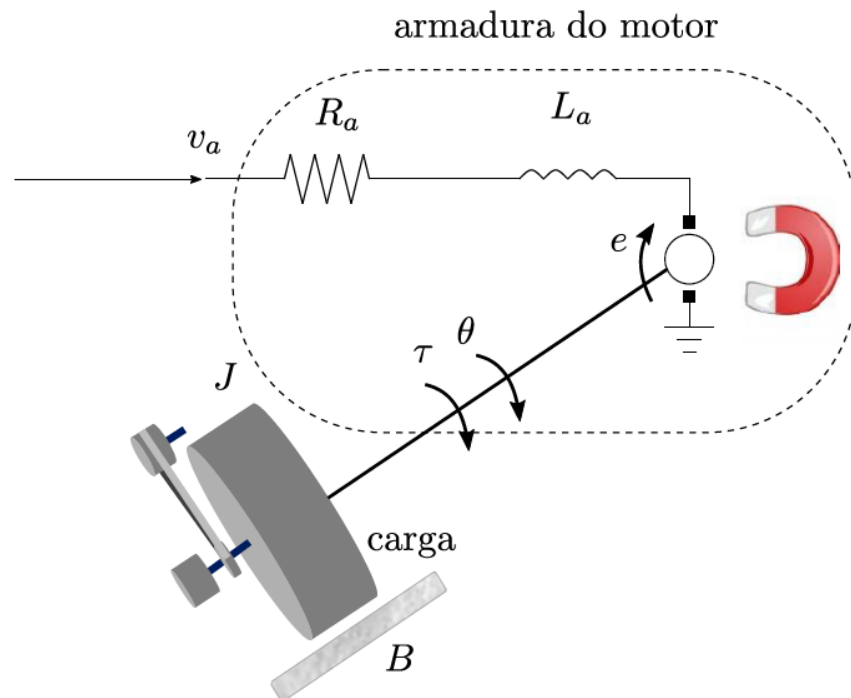
Como a derivada da rampa é o degrau e a derivada do degrau é o impulso:

a **resposta ao degrau** é igual à derivada da **resposta à rampa** e
a **resposta ao impulso** é igual à derivada da **resposta ao degrau**.

V.4. Resposta Transitória de Sistemas de Primeira Ordem

Exemplo 1:

Seja um motor de corrente contínua acoplado a uma carga rotativa. Desprezando L e B , a resposta da velocidade $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ causada por um comando **degrau unitário** na **tensão de armadura** $v_a(t)$ é:



$$y(t) = k(1 - e^{-t/\tau}), t \geq 0,$$

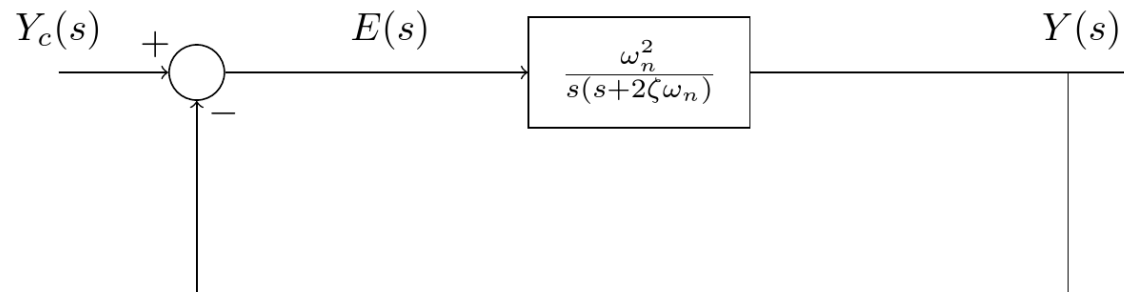
$$k \triangleq \frac{1}{k_e} \quad \tau \triangleq \frac{J R_a}{k_\tau k_e}$$

Resposta Transitória: Sistemas de Segunda Ordem

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Sistema:

Seja o sistema LIT de segunda ordem modelado pelo DB:



Sua função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2)$$

onde ω_n é a frequência natural não amortecida e ζ é o coeficiente de amortecimento do sistema.

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

A equação característica desse sistema é

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3)$$

e suas raízes s_1 e s_2 (polos de malha fechada) são

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4)$$

Em seguida, estudaremos analiticamente a resposta da TF (2) quando submetida a um comando **degrau unitário**. A análise é dividida em três casos:

- Sistemas **Subamortecidos**: $0 < \zeta < 1$
- Sistemas **Criticamente Amortecidos**: $\zeta = 1$
- Sistemas **Superamortecidos**: $\zeta > 1$

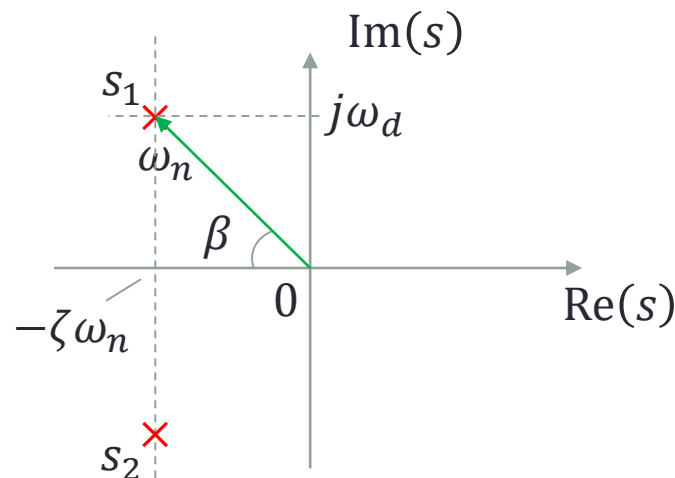
V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Sistemas Subamortecidos, $0 < \zeta < 1$:

Neste caso, as raízes em (4) são complexas conjugadas e podem ser reescritas como

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d, \quad (5)$$

onde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ é a **frequência natural amortecida**. Essas raízes são representadas no plano complexo da seguinte forma:



V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Da figura acima, o ângulo β é tal que

$$\cos \beta = \zeta \quad \text{ou} \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (6)$$

Considerando um **comando degrau unitário**, *i.e.*, $Y_c(s) = 1/s$, de (2), a **saída do sistema** é obtida como sendo

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

cuja transformada inversa de Laplace resulta em

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0 \quad (7)$$

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Observações:

- Se $\zeta = 0$, a equação (7) se reduz a $y(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \pi/2)$. Isto é, o sistema fica no limiar de estabilidade. Da equação (5), observa-se que os polos do sistema se tornam imaginários, *i.e.*, $s_{1,2} = \pm j\omega_n$;
- Se $\zeta < 0$, da equação (5), observa-se que os polos $s_{1,2}$ do sistema estão no semiplano complexo da direita e, portanto, o sistema é instável. Da equação (7), nota-se que $y(t)$ cresce ilimitadamente com o tempo.

Em seguida, são obtidas expressões que relacionam t_s , t_p , t_a e M_p com os parâmetros ζ e ω_n de um sistema de segunda ordem padrão.

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Subida, t_s :

É tal que $y(t_s) = 1$. Usando (7), obtemos

$$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t_s + \beta) = 1,$$

donde $\sin(\omega_d t_s + \beta) = 0$, ou ainda $\omega_d t_s + \beta = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$

Logo, fazendo $k = 1$,

$$t_s = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

em que β é dado por (6).

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Pico, t_p :

É tal que $\dot{y}(t_p) = 0$. Derivando a equação (7), obtemos:

$$-\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_d \cos(\omega_d t_p + \beta) + \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\zeta\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) = 0,$$

$$\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t_p + \beta) = \zeta \sin(\omega_d t_p + \beta) = 0,$$

$$\tan(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}. \quad (8)$$

Por outro lado, por geometria (figura do slide 27),

$$\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \tan(\beta + k\pi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Fazendo $k = 1$ e substituindo (9) em (8), vem

$$\tan(\omega_d t_p + \beta) = \tan(\beta + \pi),$$

$$\omega_d t_p + \beta = \beta + \pi,$$

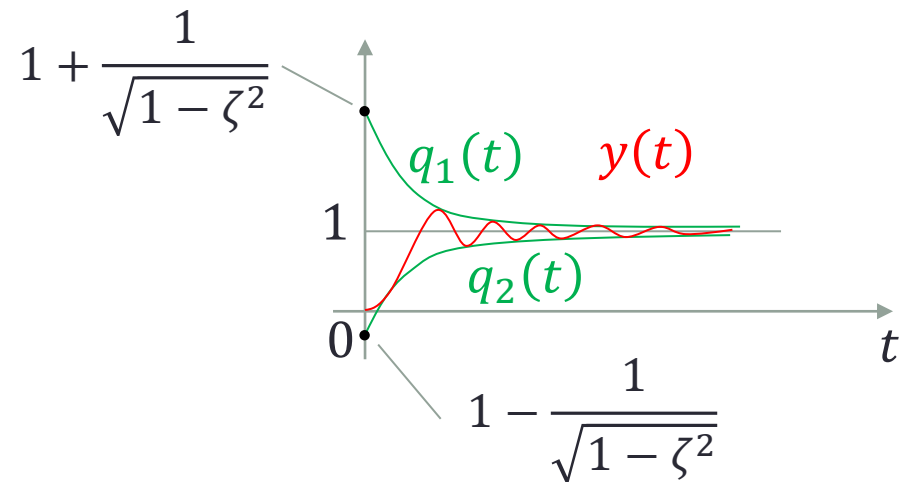
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Tempo de Acomodação, t_a , 2%:

As envoltórias exponenciais da resposta $y(t)$ dada por (7) são $q_{1,2}(t)$:

$$q_{1,2}(t) = 1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (10)$$



O tempo de acomodação é tal que $q_1(t_a) = 1,02$. Logo, de (10),

$$t_a = -\frac{\ln(0,02\sqrt{1 - \zeta^2})}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Máxima Ultrapassagem, M_p :

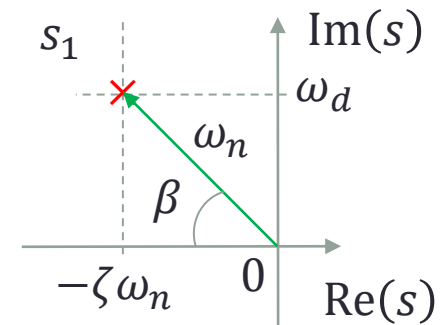
É dada por $M_p = y(t_p) - 1$. Então, usando (7), obtemos

$$M_p = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \beta) = -\frac{e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \beta\right),$$

$= -\sin\beta$

$$M_p = -\frac{e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(-\sqrt{1-\zeta^2}\right),$$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Sistemas Criticamente Amortecidos, $\zeta = 1$:

Neste caso, as raízes em (4) são reais e iguais:

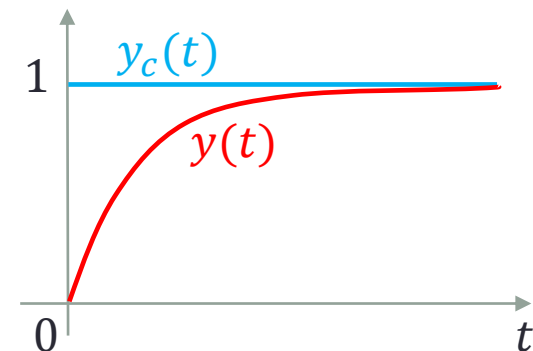
$$s_{1,2} = -\omega_n$$

Considerando um comando degrau unitário, *i.e.*, $Y_c(s) = 1/s$, de (2), a saída do sistema é obtida como sendo

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2},$$

cuja transformada inversa de Laplace resulta em

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), t \geq 0$$



V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Sistemas Superamortecidos, $\zeta > 1$:

Neste caso, as raízes em (4) são reais e distintas:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Considerando um comando degrau unitário, *i.e.*, $Y_c(s) = 1/s$, de (2), a saída do sistema é obtida como sendo

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)},$$

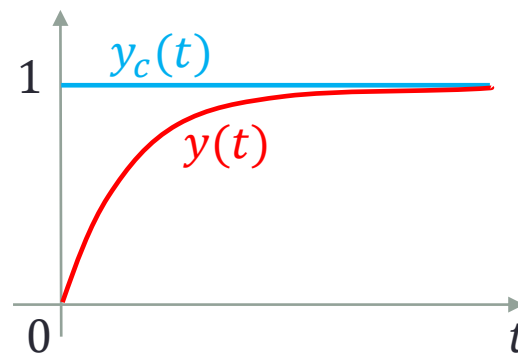
$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} + \frac{k_3}{\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)},$$

...

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

cuja transformada inversa de Laplace fornece

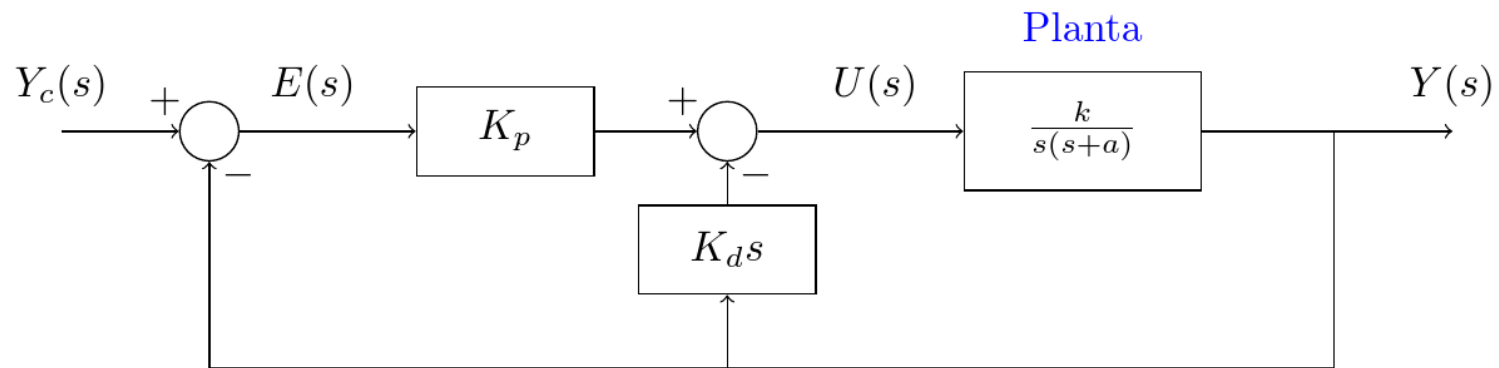
$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad t \geq 0.$$



V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Exemplo 2:

Seja um **servomecanismo de posição angular**, controlado por uma lei de **controle P-D**, modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



Considere conhecidos os parâmetros k e a do **modelo da planta**. Dados (como especificação de desempenho) o **tempo de pico** t_p e a **máxima ultrapassagem** M_p da saída $y(t)$ em resposta a um comando $y_c(t)$ do tipo **degrau unitário**, obtenha expressões para o cálculo de K_p e K_d .

V.5. Resposta Transitória de Sistemas de Segunda Ordem

Resposta do Exemplo 2:

$$K_p = \frac{\pi^2 + (\ln M_p)^2}{kt_p^2}$$

$$K_d = \frac{2|\ln M_p| - at_p}{kt_p}$$

Essas fórmulas nos lembram que uma **lei de controle** é projetada a partir do **modelo da planta** e das **especificações de desempenho**.

Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Motivação:

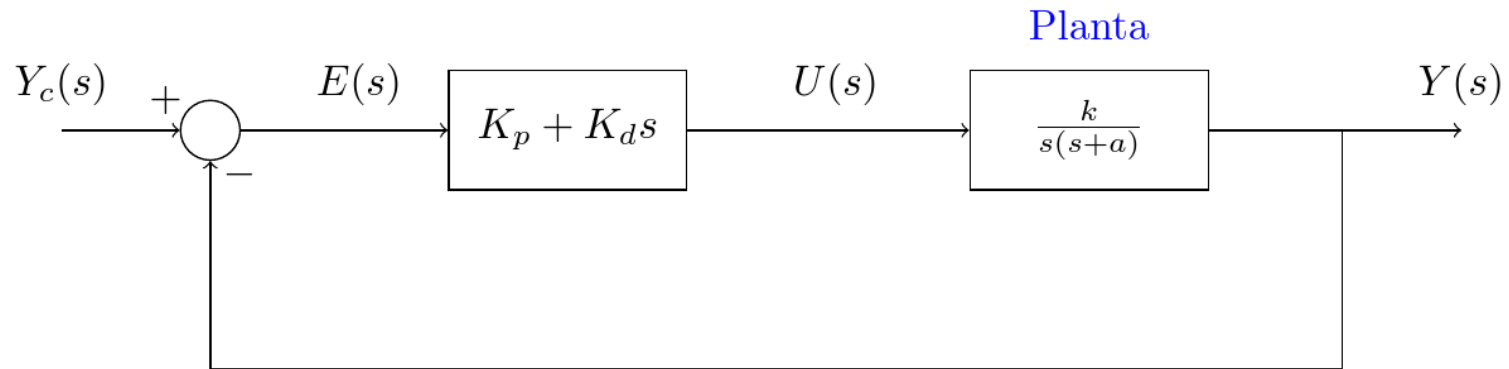
- Para **sistemas de segunda ordem padrão**, deduzimos relações simples entre especificações de desempenho (t_s, t_p, t_a e M_p) e os parâmetros do modelo do sistema (ζ e ω_n).

Seria possível deduzir tais relações para **sistemas de segunda ordem com um zero** ou para **sistemas de ordem superior**?

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Exemplo 3 (Desafio):

Seja um **servomecanismo de posição angular**, controlado por uma lei de **controle PD**, modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



Considere conhecidos os parâmetros k e a do **modelo da planta**. Dados (como especificação de desempenho) o **tempo de pico** t_p e a **máxima ultrapassagem** M_p da saída $y(t)$ em resposta a um comando $y_c(t)$ do tipo **degrau unitário**, obtenha expressões para o cálculo de K_p e K_d .

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Início da Solução:

Função de transferência de malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{k(K_p + K_d s)}{s^2 + (a + kK_d)s + kK_p}$$

Considerando uma entrada do tipo degrau unitário,

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{k(K_p + K_d s)}{s^2 + (a + kK_d)s + kK_p}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{kK_p}{s^2 + (a + kK_d)s + kK_p} + \frac{K_d}{K_p} \frac{kK_p}{s^2 + (a + kK_d)s + kK_p}$$

e, portanto,

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) + T_z \omega_n \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \quad (11)$$

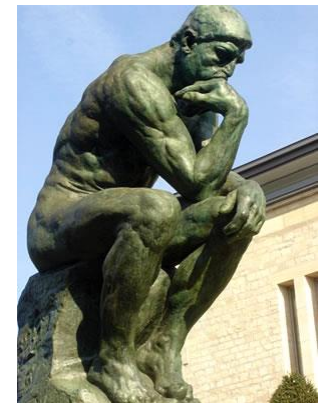
...

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

onde

$$\omega_n = \sqrt{kK_p}, \quad \zeta = \frac{(a + kK_d)}{2\omega_n}, \quad T_z = \frac{K_d}{K_p}.$$

Tente achar uma relação algébrica entre M_p e t_p e os parâmetros ω_n , ζ e T_z da resposta temporal dada pela *equação (11)*.



Le Penseur, A. Rodin, 1902.

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Comentários:

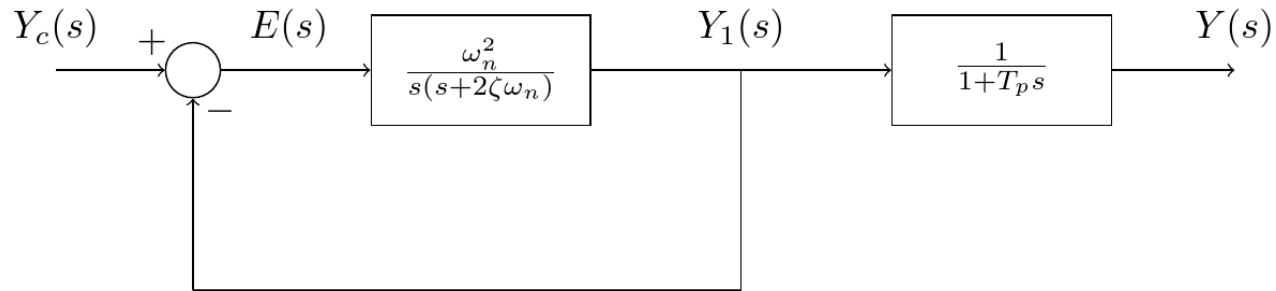
- **Para fins de projeto**, é interessante que o **sistema em malha fechada** se comporte aproximadamente como um **sistema de segunda ordem padrão**;
- **Caso essa aproximação seja inviável**, é interessante sabermos, ao menos de forma **qualitativa**, o efeito da inserção de polos ou zeros a um sistema de segunda ordem padrão.

Abreviaturas usadas em seguida:

- **FTMF**: Função de Transferência de Malha Fechada.
- **FTMA**: Função de Transferência de Malha Aberta.

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Inserção de um Polo à FTMF:



A função de transferência de malha fechada fica

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{1}{1 + T_p s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{k_1}{s + 1/T_p} + \frac{k_2}{s + \zeta\omega_n - j\omega_d} + \frac{k_3}{s + \zeta\omega_n + j\omega_d},$$

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

onde

$$k_1 = \frac{T_p^2 \omega_n^2}{T_p^2 \omega_n^2 + 1 - 2\zeta \omega_n T_p} \quad k_2 = \frac{\omega_n^2}{2j\omega_d \left(1 - T_p(\zeta \omega_n + j\omega_d)\right)}$$

$$k_3 = \frac{\omega_n^2}{-2j\omega_d \left(1 - T_p(\zeta \omega_n - j\omega_d)\right)}$$

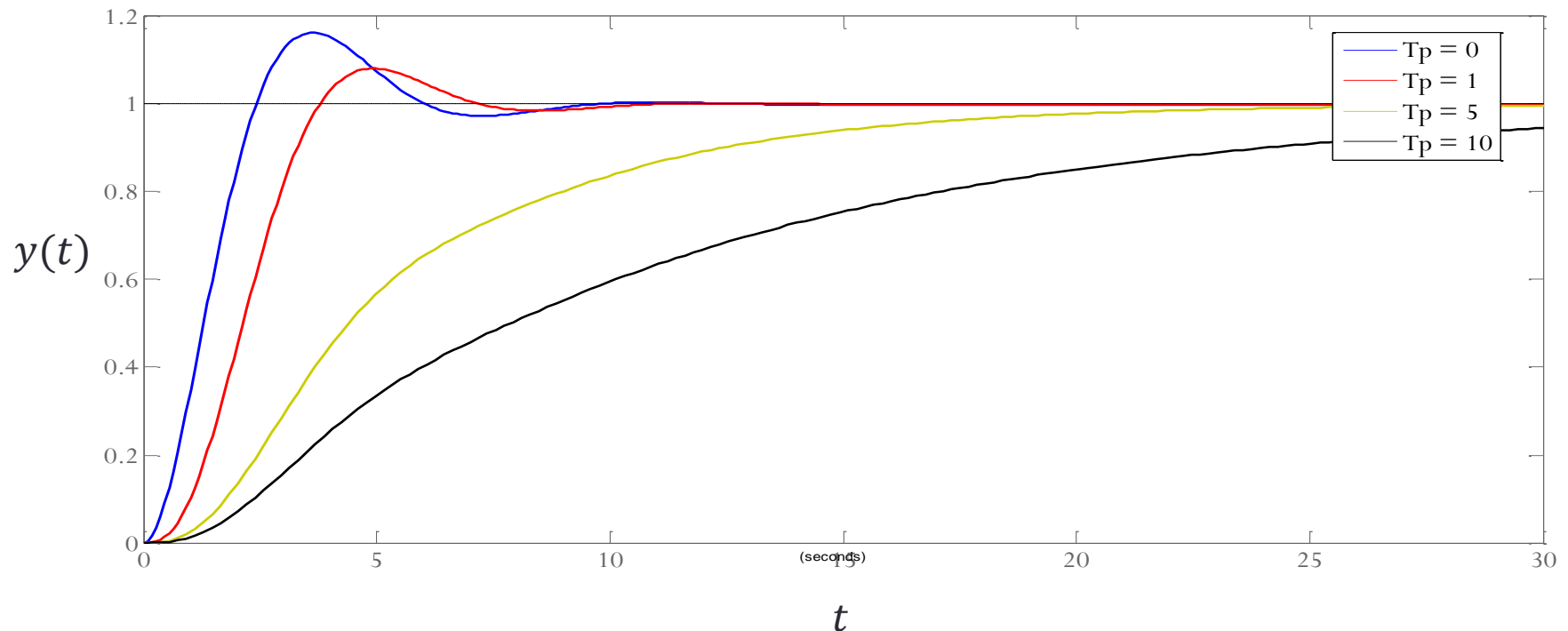
Análise Qualitativa:

- O aumento de T_p aumenta a significância do **polo real** em relação ao **par de polos complexos**.
- Conseqüentemente, o **aumento** de T_p :
 - **Reduz** M_p ;
 - Torna o sistema mais **lento**.

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

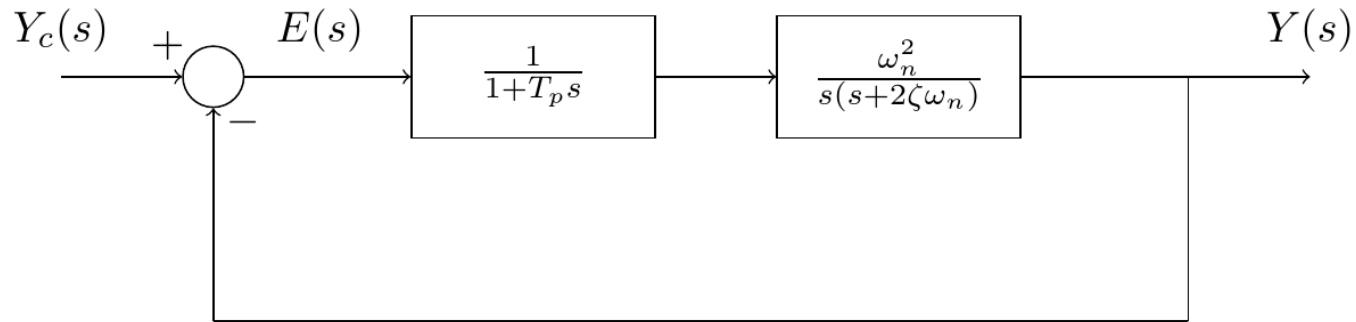
Simulação:

Considere $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,5$. Comandando o sistema com um degrau unitário, suas respostas para $T_p = 0$, 1, 5, e 10 são as mostradas no gráfico:



V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Inserção de um Polo à FTMA:



A função de transferência de malha fechada fica

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{T_p s^3 + (2\zeta\omega_n T_p + 1)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Análise Qualitativa:

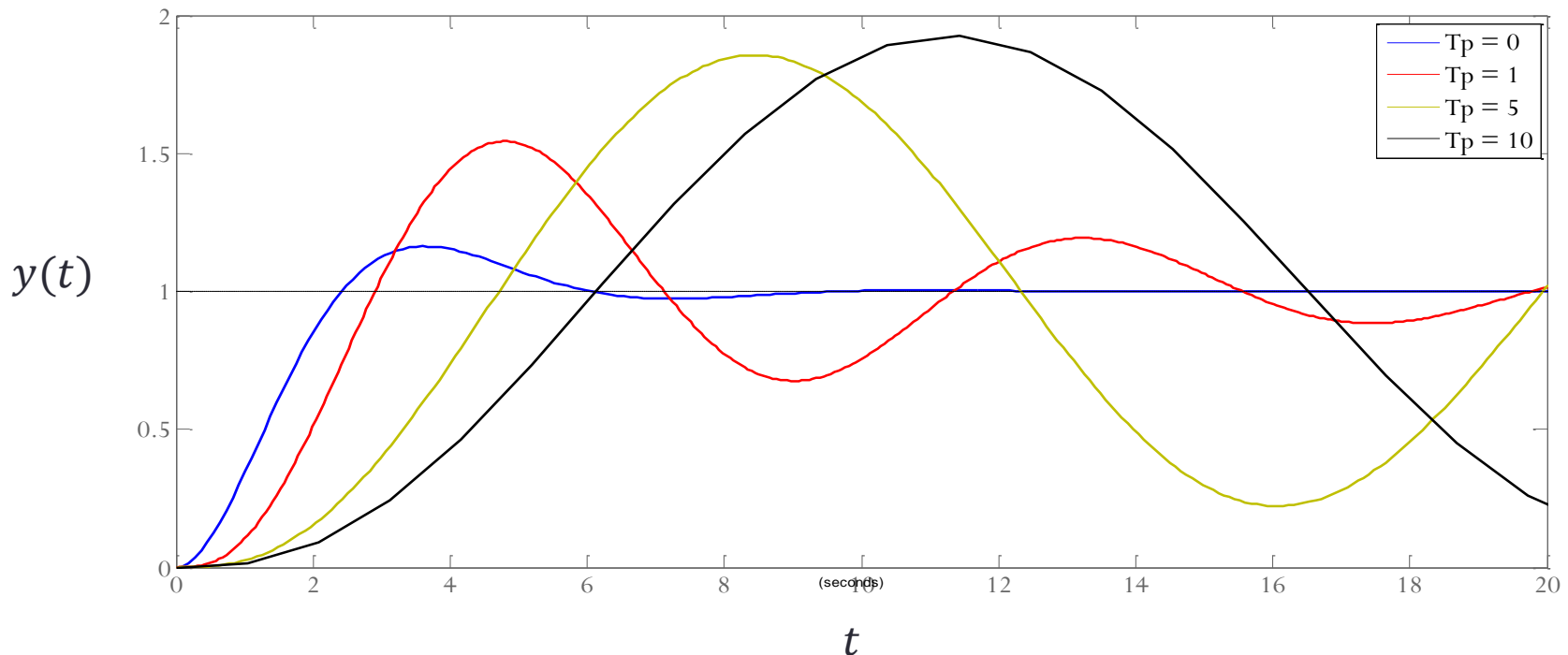
Espera-se que o **polo de malha aberta** inserido em $\check{s} = -1/T_p$:

- Aumente M_p à medida que se aumenta T_p , pois dessa forma, \check{s} se aproxima do **semiplano complexo da direita**.
- Torne o sistema **mais lento**, pois o fator $1/(1 + T_p s)$ tem característica de um **filtro Passa-Baixa (PB)**.

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

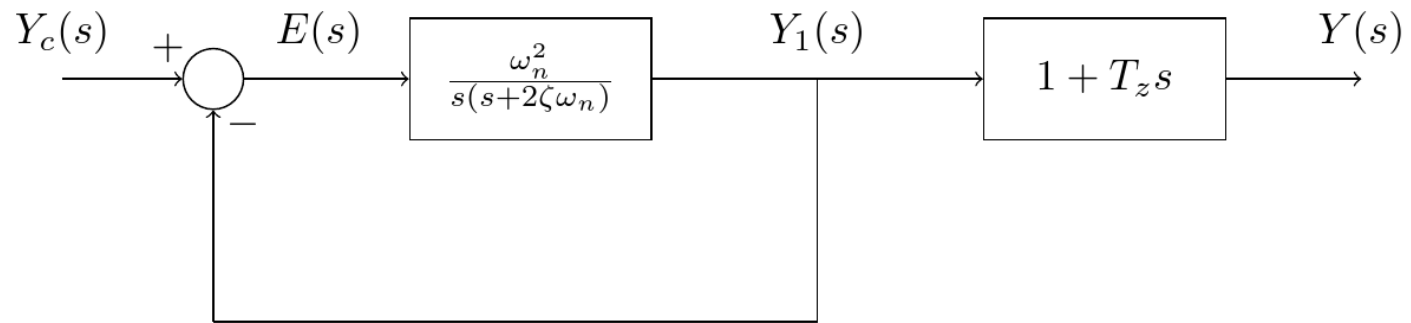
Simulação:

Considere $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,5$. Comandando o sistema com um degrau unitário, suas respostas para $T_p = 0$; 1; 5; e 10 são as mostradas no gráfico:



V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Inserção de um Zero à FTMF:



A função de transferência de malha fechada fica

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + T_z s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

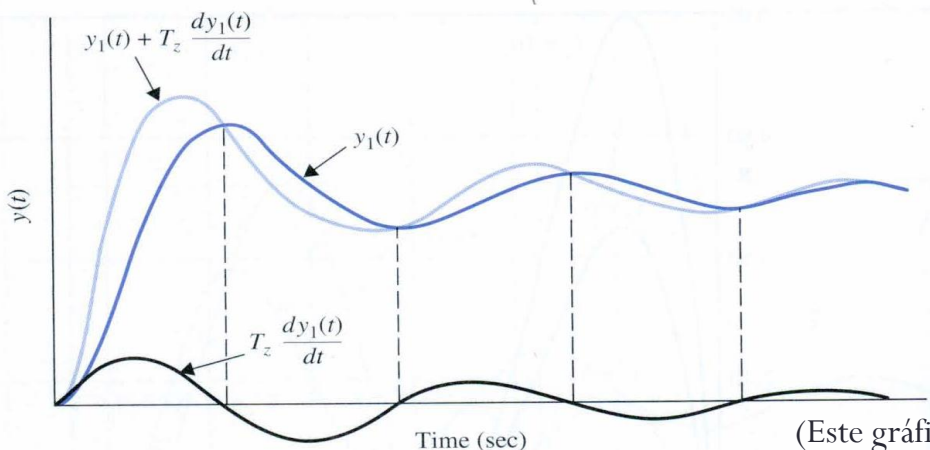
V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Considerando uma entrada degrau unitário, a saída fica:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{\omega_n^2 T_z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}_{sT_z Y_1(s)}$$

que no domínio do tempo fica:

$$y(t) = y_1(t) + T_z \dot{y}_1(t).$$



(Este gráfico foi retirado de [Kuo, B. C.; Golnaraghi, F. Automatic Control Systems, John Wiley & Sons, 2003], página 280.)

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Análise Qualitativa:

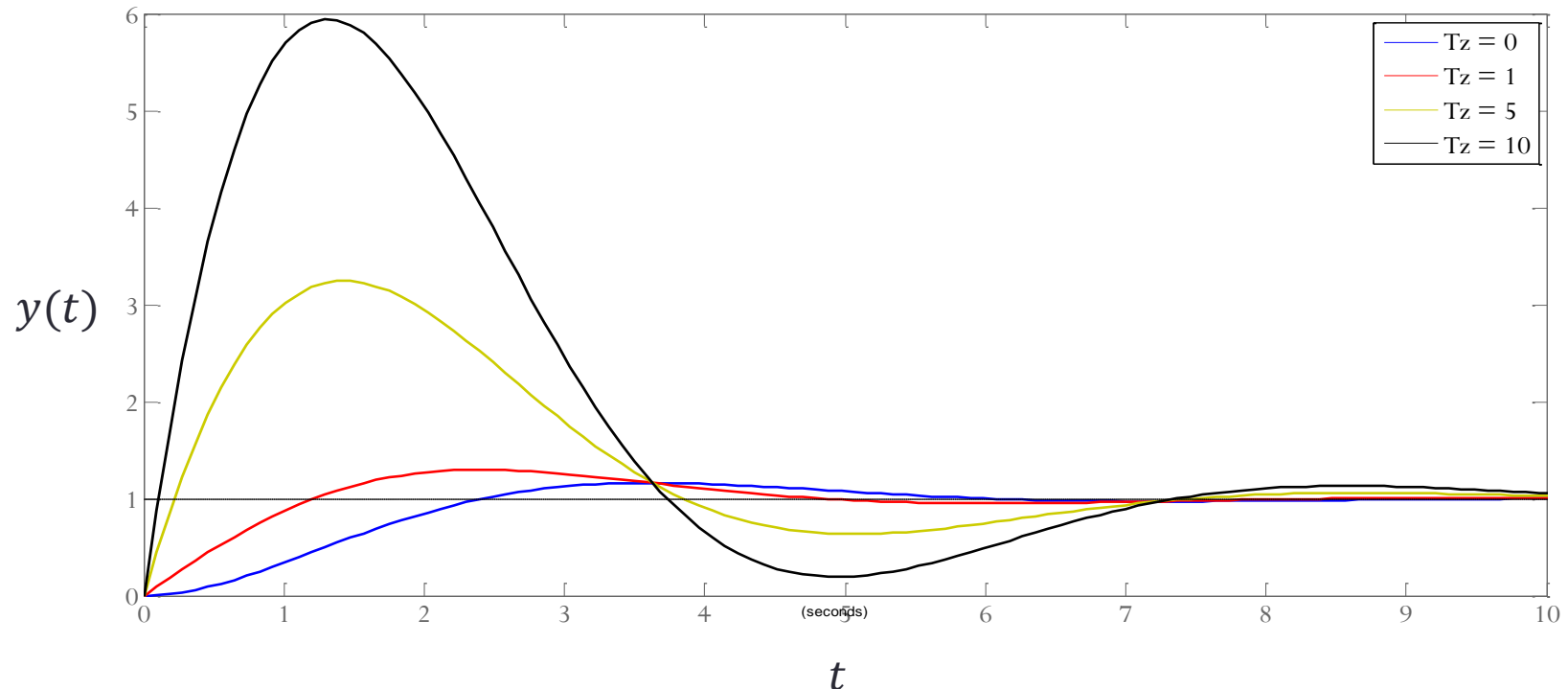
Espera-se que o **zero de malha fechada** inserido em $\check{s} = -1/T_z$:

- **Aumente** M_p à medida que aumentamos T_z ;
- Torne o sistema **mais rápido** à medida que aumentamos T_z .

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

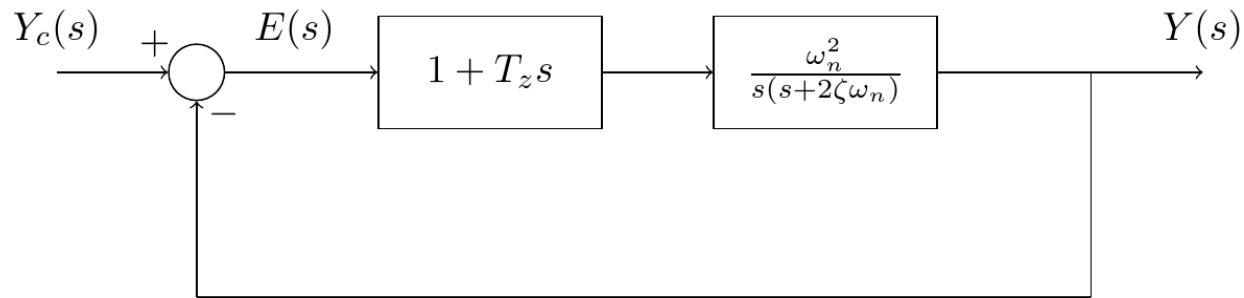
Simulação:

Considere $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,5$. Comandando o sistema com um degrau unitário, suas respostas para $T_z = 0$; 1; 5; e 10 são as mostradas no gráfico:



V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Inserção de um Zero à FTMA:



A função de transferência de malha fechada fica

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + T_z s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T_z\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

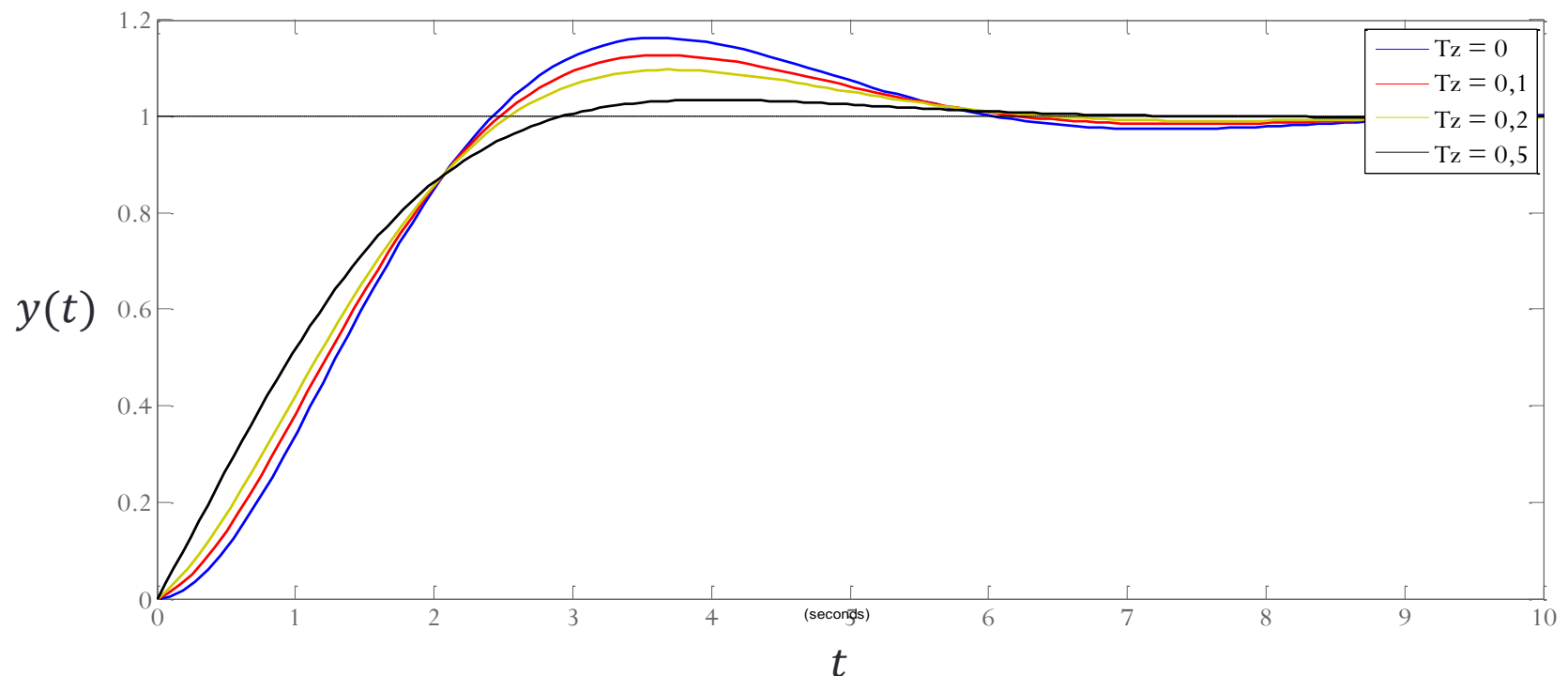
Análise Qualitativa:

- O parâmetro T_z tem os seguintes efeitos:
 - No **numerador**: aumenta M_p e reduz t_s ;
 - No **denominador**: reduz M_p e aumenta t_s .
- Dependendo da faixa de valores de T_z , um ou o outro efeito acima descritos será dominante.

V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

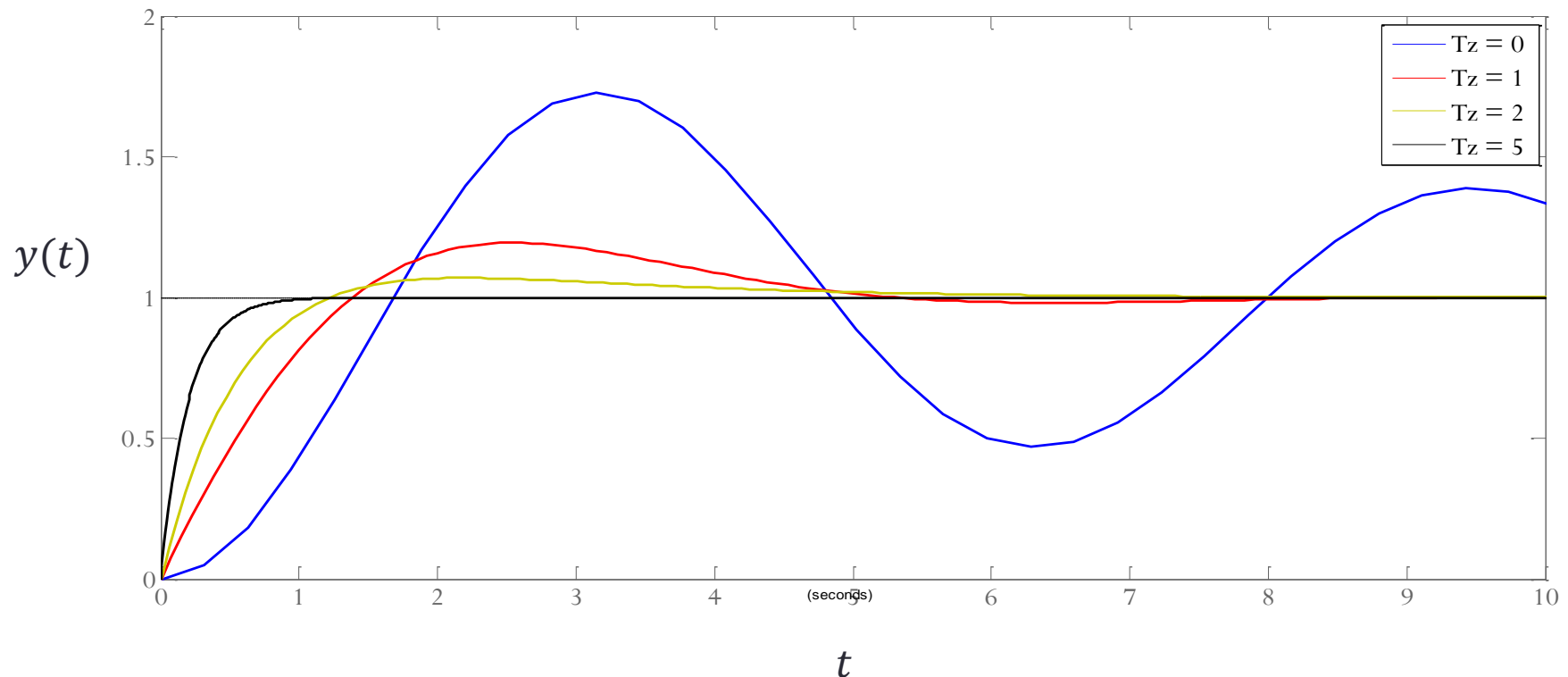
Simulações:

Considere $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,5$. Comandando o sistema com um degrau unitário, suas respostas para $T_z = 0; 0,1; 0,2$; e $0,5$ são as mostradas no gráfico:



V.6. Efeitos da Inserção de Polos e Zeros

Considere $\omega_n = 1$, $\zeta = 0,1$. Comandando o sistema com um degrau unitário, suas respostas para $T_z = 0; 1; 2;$ e 5 são as mostradas no gráfico:

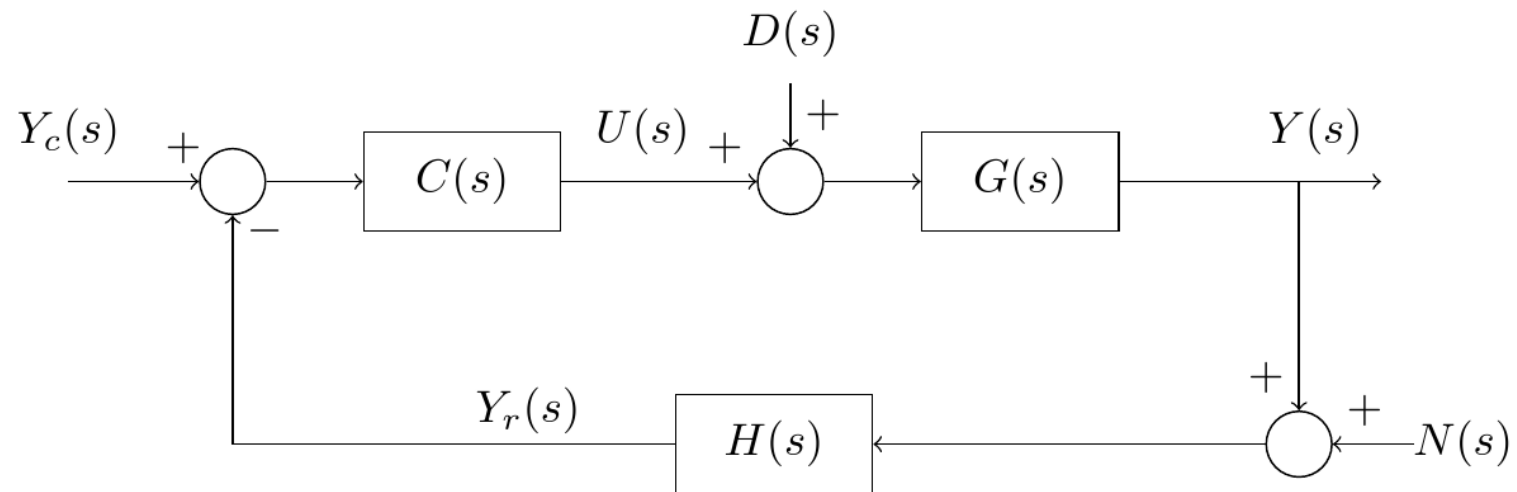


Desempenho em Regime Permanente

V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Definições:

Seja o sistema modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Vamos definir o **erro (de controle)** do sistema como

$$E(s) \triangleq Y_c(s) - Y(s) \quad (12)$$

que no domínio do tempo fica

$$e(t) \triangleq y_c(t) - y(t)$$

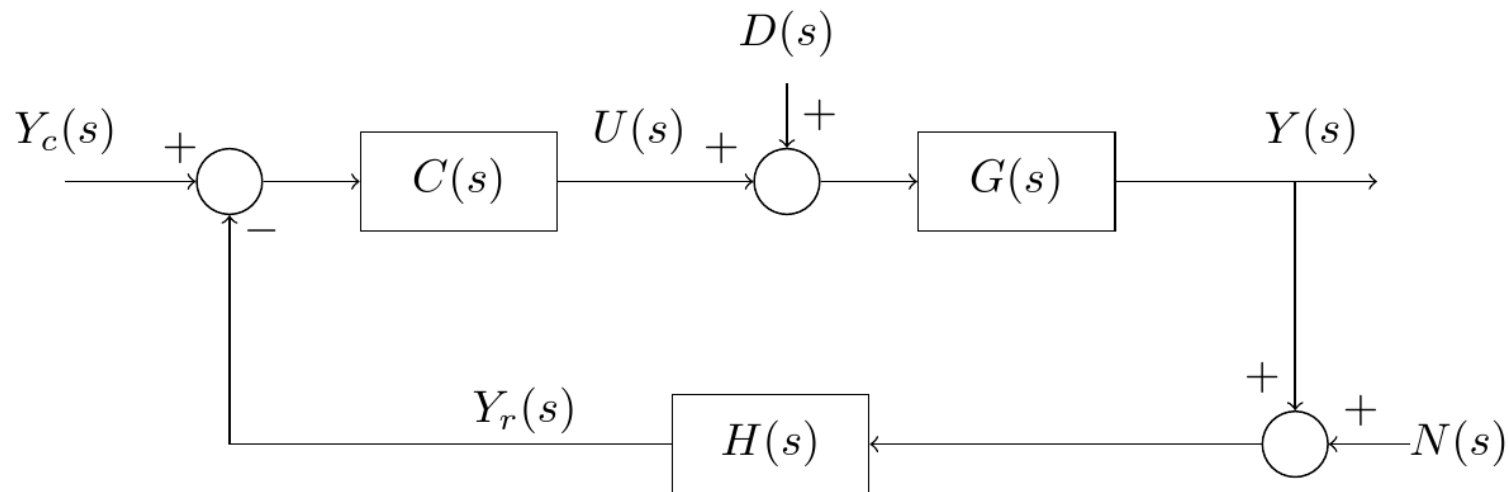
O **erro em regime permanente** é então definido por

$$e_p \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (13)$$

V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Causas de Erro em Regime Permanente:

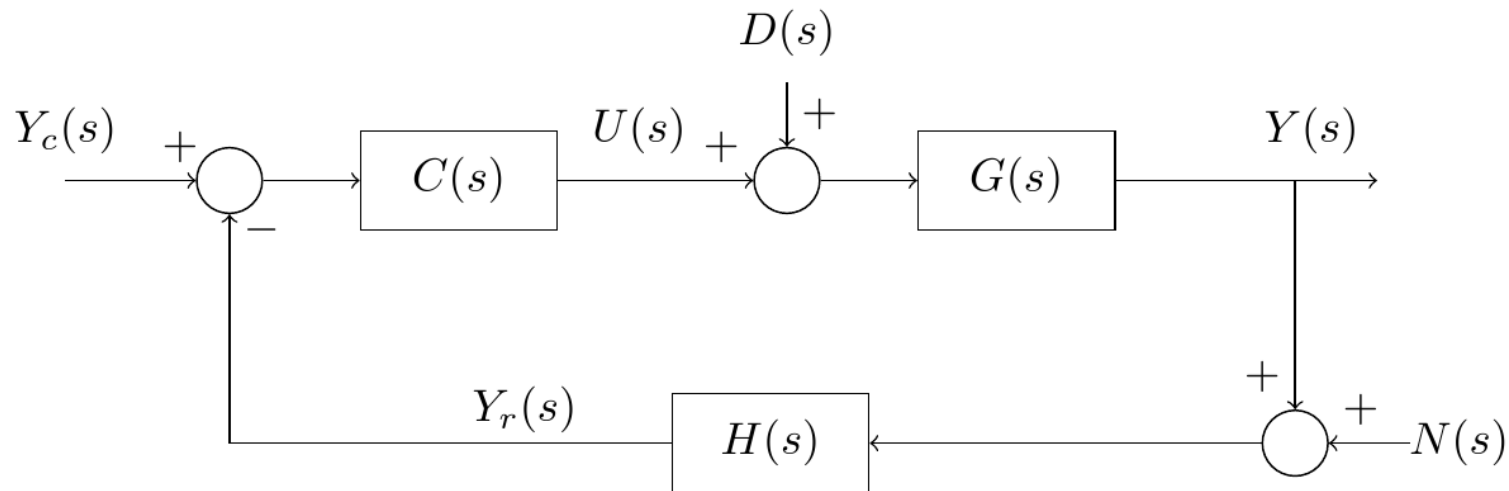
- Externas: entradas de **distúrbio** $D(s)$ e de **ruído** $N(s)$.
- Internas: **não linearidades** (atrito seco ou folga); característica **entrada-saída** do sistema.



V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Exemplo 4:

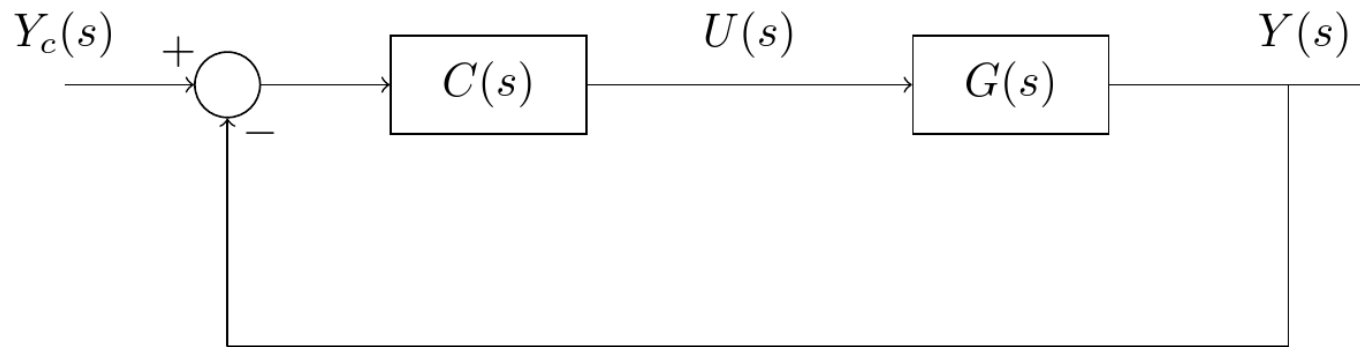
No DB abaixo, considere $C(s) = 1$, $H(s) = 2$ e $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$. Calcule e_p para um comando degrau unitário. Despreze não linearidades, distúrbio e ruído de medida.



V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Sistemas com Realimentação Unitária:

Seja agora o sistema modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



O erro de controle definido na equação (12), fica

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} Y_c(s) \quad (14)$$

V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Considere que a **função de transferência da malha** tenha a forma

$$C(s)G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (1 + T_{m_1} s + T_{m_2} s^2)}{s^j (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (1 + T_{n_1} s + T_{n_2} s^2)} \quad (15)$$

em que $T_a, T_b, \dots, T_{m_1}, T_{m_2}, T_1, T_2, \dots, T_{n_1}, T_{n_2}$ são constantes reais e j é uma constante inteira não negativa.

Dizemos que

j é o tipo do sistema

V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Comando Degrau Unitário:

Considerando $Y_c(s) = 1/s$ em (14), obtemos

$$E(s) = \frac{1}{s(1 + C(s)G(s))}$$

Usando o **Teorema do Valor Final**, o erro em regime permanente é obtido como sendo

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + \kappa_p}$$

...

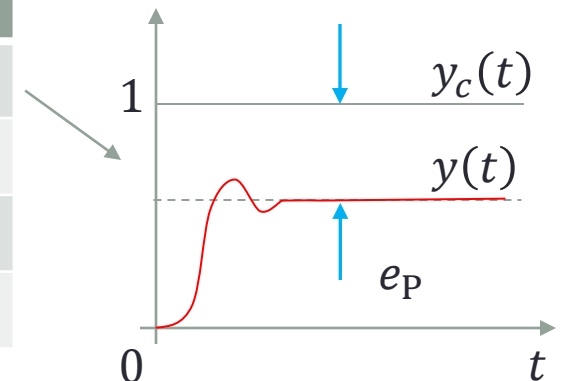
V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

onde κ_p é a constante de erro de posição:

$$\kappa_p \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (1 + T_{m_1} s + T_{m_2} s^2)}{s^j (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (1 + T_{n_1} s + T_{n_2} s^2)}$$

Em resumo,

Tipo (j)	κ_p	$e_P = 1/(1 + \kappa_p)$
0	K	$1/(1 + K)$
1	∞	0
2	∞	0
...



V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Comando Rampa Unitária:

Considerando $Y_c(s) = 1/s^2$ em (14), obtém-se

$$E(s) = \frac{1}{s^2(1 + C(s)G(s))}$$

Usando o **Teorema do Valor Final**, o erro em regime permanente é obtido como sendo

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{K_v} \quad \dots$$

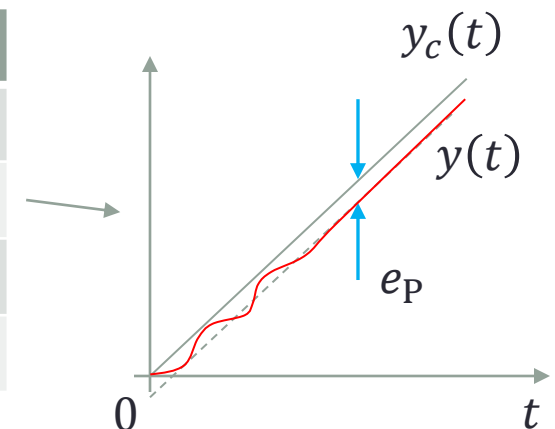
V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

onde κ_v é a **constante de erro de velocidade**:

$$\kappa_v \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (1 + T_{m_1} s + T_{m_2} s^2)}{s^{j-1}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (1 + T_{n_1} s + T_{n_2} s^2)}$$

Em resumo,

Tipo (j)	κ_v	$e_P = 1/\kappa_v$
0	0	∞
1	K	$1/K$
2	∞	0
...



V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

Comando Parábola Unitária:

Considerando $Y_c(s) = 1/s^3$ em (14), obtemos

$$E(s) = \frac{1}{s^3(1 + C(s)G(s))}$$

Usando o **Teorema do Valor Final**, o erro em regime permanente é obtido como sendo

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{\kappa_a} \quad \dots$$

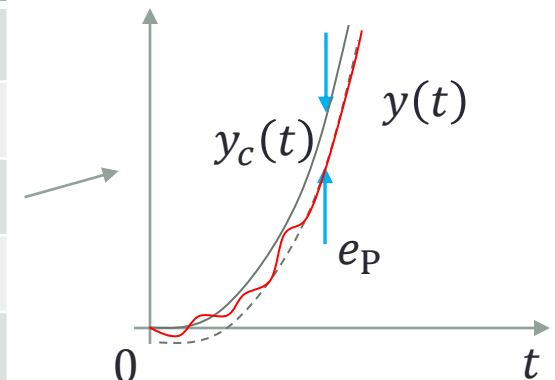
V.7. Análise de Desempenho em Regime Permanente

onde κ_a é a **constante de erro de aceleração**:

$$\kappa_a \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} s^2 C(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (1 + T_{m_1} s + T_{m_2} s^2)}{s^{j-2}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (1 + T_{n_1} s + T_{n_2} s^2)}$$

Em resumo,

Tipo (j)	κ_a	$e_P = 1/\kappa_a$
0	0	∞
1	0	∞
2	K	$1/K$
3	∞	0
...



Obrigado pela presença
e atenção!