



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

VI. MÉTODO DO LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)

Departamento de Mecatrônica

<http://www.professordavisantos.com> — **courses/MPS-43**

Agosto/2022
São José dos Campos

Sumário

VI. MÉTODO DO LGR

VI.1. Definição de LGR

VI.2. Aplicações em Sistemas de Controle

VI.3. Condições de Módulo e Fase

VI.4. Propriedades de LGRs

VI.5. Esboço de LGRs

VI.6. Ajuste de Ganho de Controladores Usando o LGR

Definição de LGR

VI.1. Definição

Considere a seguinte **equação algébrica** na variável $s \in \mathbb{C}$:

$$F(s) = 1 + K \frac{Q(s)}{P(s)} = 0 \quad (1)$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é um **parâmetro arbitrário** e

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0$$

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

em que $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ e $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, m - 1$ são **constantes conhecidas**; $n > m$.

VI.1. Definição

Definição de LGR:

O Lugar Geométrico das Raízes (LGR) referente à equação (1) consiste no gráfico, no plano s , de suas raízes para todos os valores do parâmetro arbitrário $K \in (-\infty, \infty)$.

$$F(s) = 1 + K \frac{Q(s)}{P(s)} = 0 \quad (1)$$

← grau n

VI.1. Definição

Comentários:

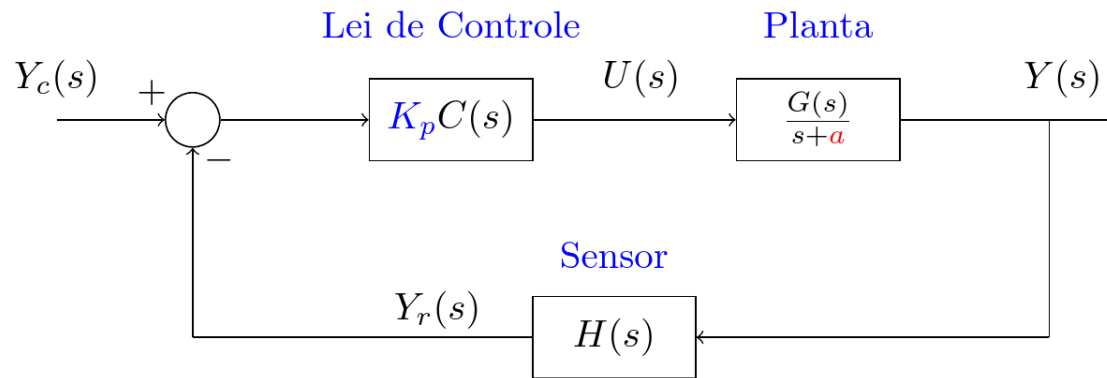
1. Neste curso, o LGR será aplicado na **localização dos polos de malha fechada**, de sistemas de controle, em função de um **parâmetro da planta ou do controlador**.
2. Vamos sempre considerar $K \geq 0$.
3. Embora seja possível a construção de LGRs considerando a variação de **múltiplos parâmetros**, isso será evitado neste curso, pois a complexidade adicionada não a justifica.*

* O lugar geométrico resultante é chamado de contorno das raízes. Vide detalhes em (OGATA, 2010)

Aplicações em Sistemas de Controle

VI.2. Aplicações em Sistemas de Controle

Seja o sistema de controle modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



A equação característica desse sistema é

$$1 + \frac{K_p}{s+a} C(s)G(s)H(s) = 0 \quad (2)$$

onde $C(s)$, $G(s)$ e $H(s)$ são funções racionais em s e $K_p \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ são parâmetros da malha.

VI.2. Aplicações em Sistemas de Controle

Exemplo (de Aplicação) 1:

Considerando o ganho $K = K_p$ ajustável, a equação característica (2) fica com a forma da equação (1), mediante a escolha:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{C(s)G(s)H(s)}{s + a}$$

Logo, conclui-se que, em sistemas de controle,

O LGR pode ser usado para estudar a influência de um ganho K_p de malha aberta sobre a localização dos polos de malha fechada do sistema.

VI.2. Aplicações em Sistemas de Controle

Exemplo (de Aplicação) 2:

Manipulando a equação característica (2), obtemos

$$\frac{s + a + K_p C(s)G(s)H(s)}{s + a} = 0$$

que, para $s \neq -a$, equivale a

$$s + a + K_p C(s)G(s)H(s) = 0$$

ou ainda

$$1 + \frac{a}{s + K_p C(s)G(s)H(s)} = 0 \quad (3)$$

VI.2. Aplicações em Sistemas de Controle

Considerando $K = a$ como parâmetro ajustável, a equação característica (3) fica com a forma da equação (1), mediante a escolha:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{1}{s + K_p C(s)G(s)H(s)}$$

Logo, conclui-se que, em sistemas de controle,

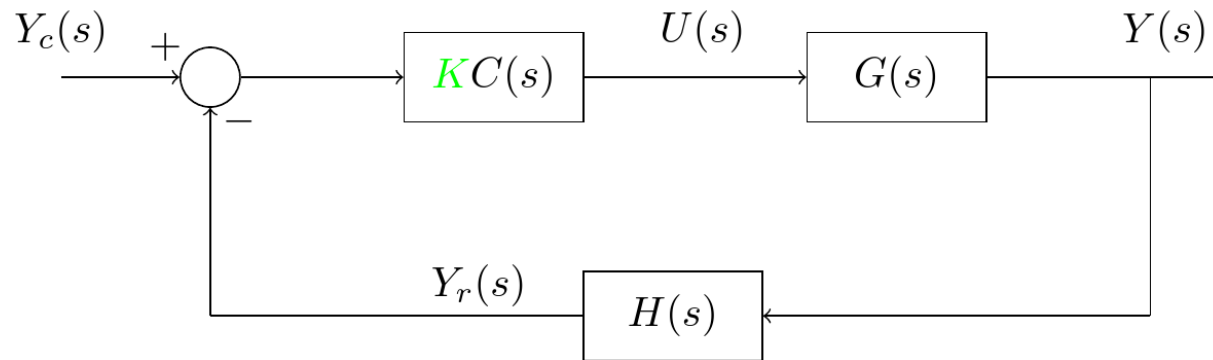
O LGR pode ser usado para estudar a influência da posição $-a$ de um polo de malha aberta sobre a localização dos polos de malha fechada do sistema.

Condições de Módulo e Fase

VI.3. Condições de Módulo e Fase

De agora em diante, será considerado como **parâmetro** dos LGRs somente um **ganho de malha aberta** $K \geq 0$, que pode indistintamente ser um ganho do **controlador**, da **planta**, ou do **sensor**.

Seja o sistema modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



A **equação característica** desse sistema é

$$1 + KC(s)G(s)H(s) = 0 \quad \dots$$

VI.3. Condições de Módulo e Fase

donde obtemos a equação algébrica

$$C(s)G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \quad (3)$$

que é satisfeita desde que as seguintes duas condições também sejam:

1. Condição de Módulo (ou de Magnitude):

$$|C(s)G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$$

2. Condição de Fase (ou de Ângulo):

$$\angle C(s)G(s)H(s) = \pm 180^\circ \times (2l + 1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

VI.3. Condições de Módulo e Fase

Comentários:

- A **condição de fase** fornece o traçado do LGR do sistema.
- A **condição de módulo** fornece o valor de K para cada ponto do LGR.

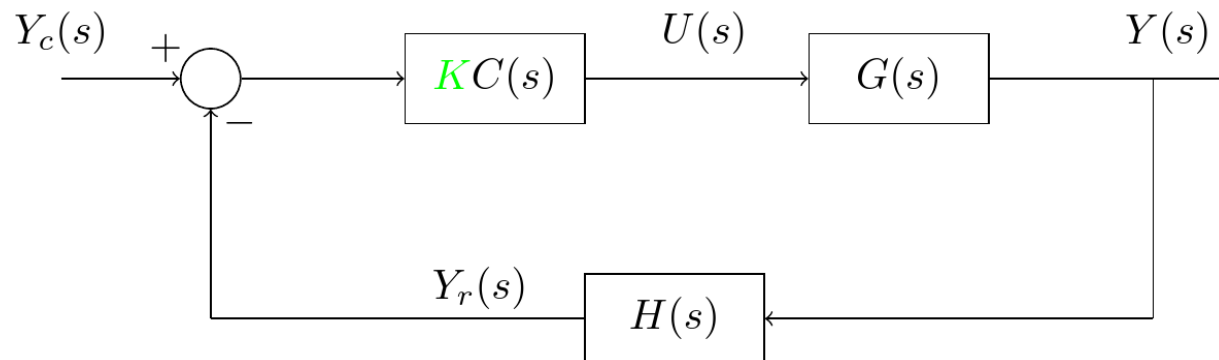
VI.3. Condições de Módulo e Fase

Exemplo 3:

Seja o sistema do **diagrama de blocos** com FTMA dada por:

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)}$$

Como verificar se o ponto $s_1 \in \mathbb{C}$ pertence ao LGR desse sistema?



Vamos fazer no quadro ...

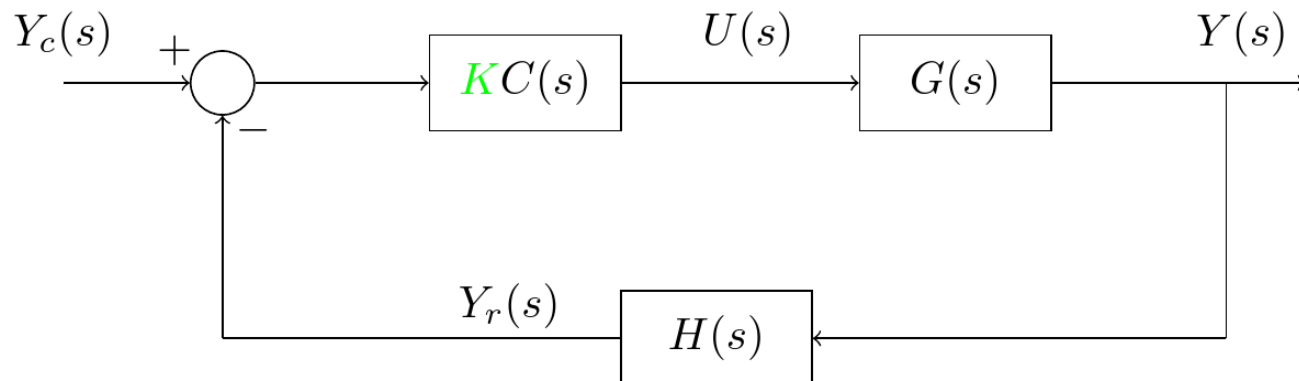
VI.3. Condições de Módulo e Fase

Exemplo 4 (neste ponto, isto é um desafio):

Seja o sistema do **diagrama de blocos** com FTMA dada por:

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Usando a **condição de fase**, trace o **LGR** desse sistema.



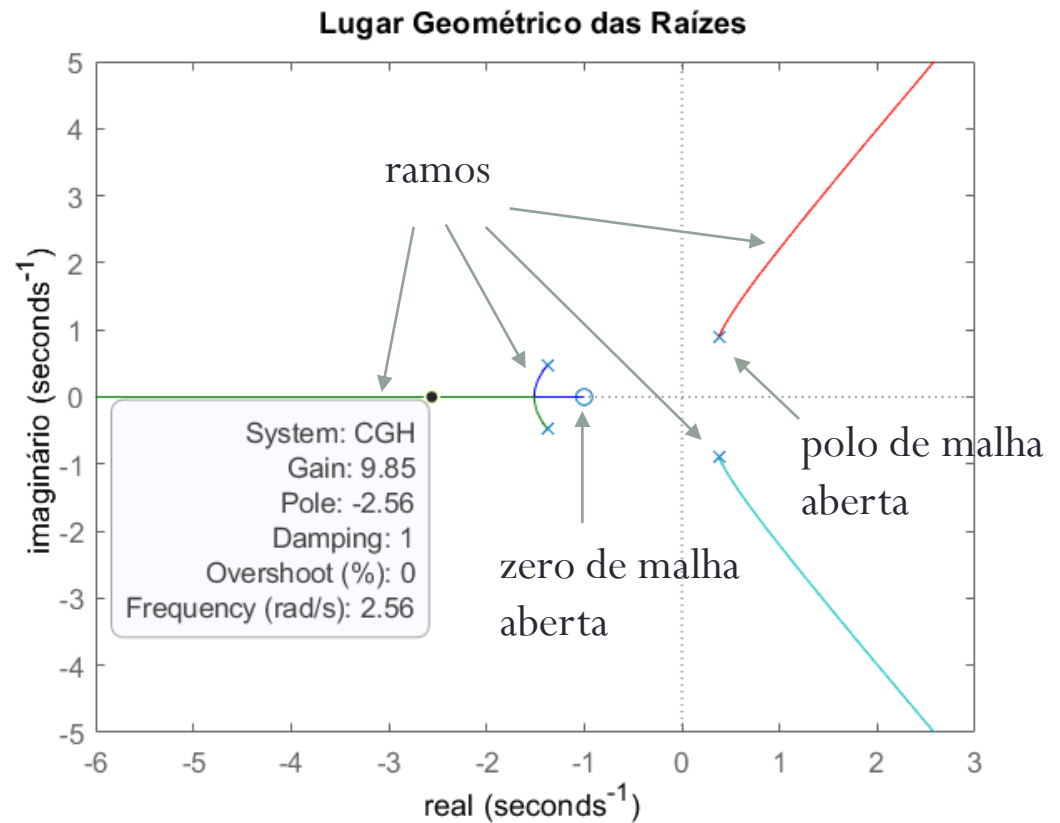
Vamos fazer no quadro ...

Propriedades de LGRs

VI.4. Propriedades de LGRs

Veja aqui um exemplo de LGR (traçado no MATLAB):

```
>> num = [1 1];
>> den = [1 2 1 1 2];
>> G = tf(num,den);
>> rlocus(G);
```



VI.4. Propriedades de LGRs

1. Origem e Destino dos Ramos do LGR:

Origem, $K = 0$: polos de malha aberta

Destino, $K = \infty$: zeros de malha aberta

Explicação:

$$C(s)G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \begin{cases} -\infty, \text{ se } K \rightarrow 0 \\ 0, \text{ se } K \rightarrow \infty \end{cases}$$

VI.4. Propriedades de LGRs

2. Número de Ramos do LGR:

É igual ao grau n do polinômio característico.

Explicação:

Para cada valor de K , a equação característica

$$1 + KC(s)G(s)H(s) = 0$$

tem n raízes, em geral, distintas.

VI.4. Propriedades de LGRs

3. Simetria:

Os LGRs são **simétricos** em relação ao **eixo real**.

Explicação:

Como os **coeficientes** do polinômio característico **são sempre reais**, suas **soluções** são **reais e/ou pares complexos** conjugados.

VI.4. Propriedades de LGRs

4. Ângulos das Assíntotas:

Quando $n > m$, a função $C(s)G(s)H(s)$ apresenta zeros no infinito; o número de zeros no infinito é $n - m$. Logo, o LGR apresenta $n - m$ assíntotas.

Seus ângulos de inclinação são:

$$\alpha_i = \pm \frac{180^\circ}{n - m} \times (2i + 1), \quad i = 0, 1, \dots$$

Explicação:

Considere que a FTMA tenha a forma:

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{\bar{K}(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad n > m \quad (4)$$

VI.4. Propriedades de LGRs

O comportamento de (4) no infinito pode ser aproximado por:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C(s)G(s)H(s) \approx \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{K} s^{n-m}$$

Então, num ponto s no infinito, a **condição de fase** resulta em

$$\angle(\bar{K}s^{n-m}) = \pm 180^\circ \times (2l + 1), l = 0, 1, \dots$$

$$(n - m)\angle s = \pm 180^\circ \times (2l + 1), l = 0, 1, \dots$$

$$\angle s = \pm \frac{180^\circ}{n - m} \times (2l + 1), l = 0, 1, \dots \quad \blacksquare$$

VI.4. Propriedades de LGRs

5. Interseção das Assíntotas:

Considere que a FTMA tenha a seguinte forma:

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}, n > m \quad (5)$$

As assíntotas do LGR se **cruzam no eixo real**, na **coordenada**:

$$\sigma_\alpha = - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

VI.4. Propriedades de LGRs

Explicação:

Da Álgebra, sabe-se que a equação (5) pode ser reescrita como

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{s^m + \sum_{j=1}^m z_j s^{m-1} + \dots}{s^n + \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \dots} \quad (6)$$

Dividindo o denominador de (6) pelo seu numerador, obtemos

$$s^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) s^{n-m-1} + \dots$$

VI.4. Propriedades de LGRs

Portanto,

$$C(s)G(s)H(s) = \frac{1}{s^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j\right)s^{n-m-1} + \dots}$$

e a equação característica se torna

$$s^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j\right)s^{n-m-1} + \dots + K = 0,$$

que, para grandes valores de s , pode ser simplificada como ...

VI.4. Propriedades de LGRs

$$\left(s + \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \right)^{n-m} = 0. \quad (7)$$

Logo, a interseção das $n - m$ assíntotas ocorre na raiz de multiplicidade $n - m$ de (7), i.e.,

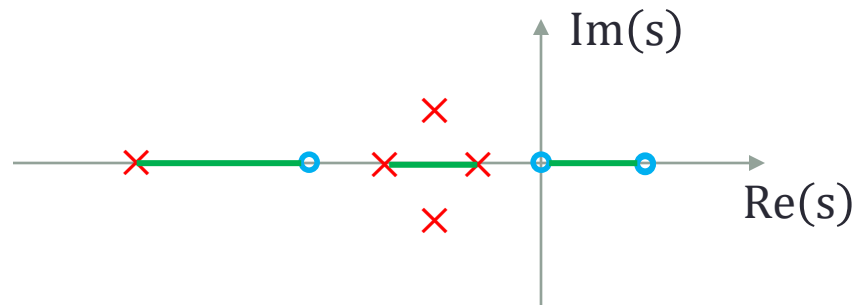
$$\sigma_\alpha = - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}. \quad \blacksquare$$

VI.4. Propriedades de LGRs

7. LGR sobre o Eixo Real:

Existe nos pontos do eixo real tais que a soma do número de polos e zeros de $C(s)G(s)H(s)$ à sua direita seja ímpar.

Exemplo:



VI.4. Propriedades de LGRs

8. Interseções do LGR com o Eixo Imaginário:

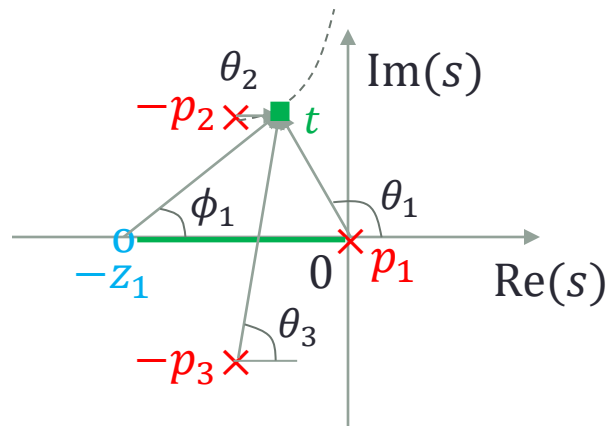
Podem ser determinadas mediante o [critério de Routh-Hurwitz](#).

Para detalhes, vide casos particulares 1 e 2 do critério de Routh-Hurwitz, no Capítulo 4 deste curso.

VI.4. Propriedades de LGRs

9. Ângulo de Chegada/Saída:

O ângulo de chegada num zero de MA ou de saída de um polo de MA pode ser determinado mediante a aplicação da condição de fase a um ponto de teste t muito próximo do polo/zero em questão.



Da condição de fase,

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \phi_1 = \pm 180^\circ(2l + 1)$$

VI.4. Propriedades de LGRs

10. Pontos de Interseção entre os Ramos:

No livro (OGATA, 2010), tais pontos são chamados de **pontos de separação**. Eles correspondem aos pontos de **soluções múltiplas da equação característica** do sistema:

$$F(s) = 1 + KC(s)G(s)H(s) = 0$$

Os **pontos de separação** podem então ser determinados resolvendo-se a equação

$$\frac{dF(s)}{ds} = 0$$

VI.4. Propriedades de LGRs

Pode-se mostrar que os **pontos de separação** podem opcionalmente ser determinados resolvendo-se a equação

$$\frac{dK(s)}{ds} = 0$$

onde

$$K(s) \triangleq \frac{-1}{C(s)G(s)H(s)}$$

Explicação:

Seja a equação característica:

$$F(s) = 1 + KC(s)G(s)H(s) \quad (8)$$

VI.4. Propriedades de LGRs

Derivando (8), a condição $dF(s)/ds = 0$ fica

$$\frac{dF(s)}{ds} = K \frac{d(C(s)G(s)H(s))}{ds} = 0$$

donde obtemos a nova condição

$$\frac{d(C(s)G(s)H(s))}{ds} = 0. \quad (9)$$

Mas definimos acima:

$$K(s) = \frac{-1}{C(s)G(s)H(s)} \quad (10)$$

VI.4. Propriedades de LGRs

Derivando (10) em relação a s , obtemos

$$\frac{dK(s)}{ds} = \frac{1}{(C(s)G(s)H(s))^2} \frac{d(C(s)G(s)H(s))}{ds} \quad (11)$$

Logo, usando (9), a equação (11) pode ser reescrita como

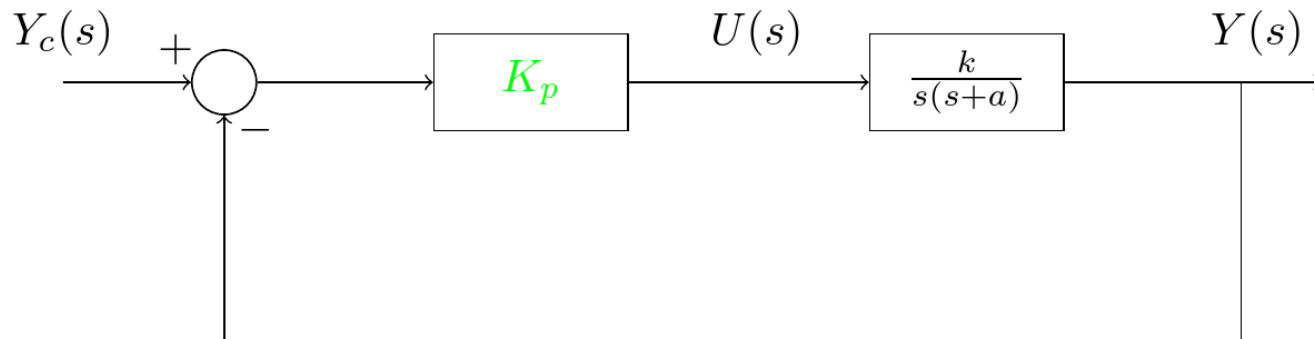
$$\frac{dK(s)}{ds} = 0 \quad \blacksquare$$

Esboço de LGRs

VI.5. Esboço de LGRs

Exemplo 5:

Seja um **servomecanismo de posição angular**, controlado por um **controlador proporcional**, modelado pelo seguinte diagrama de blocos:

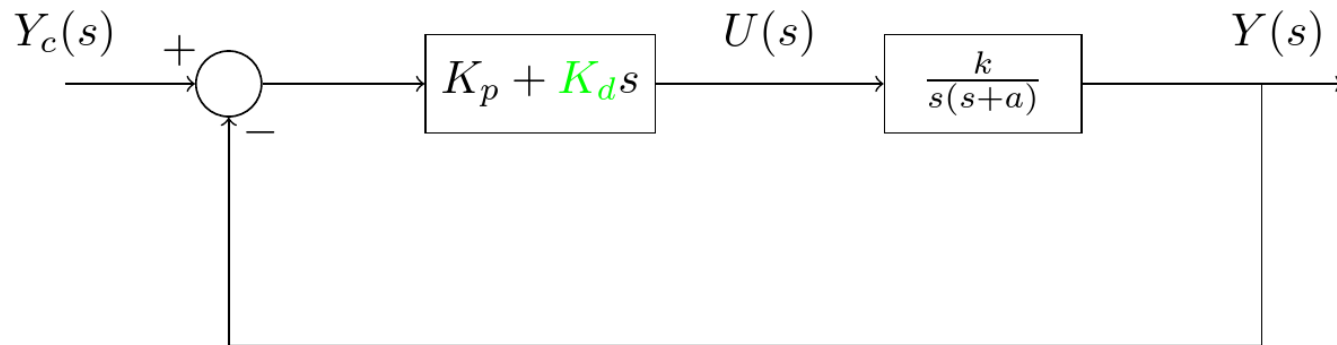


Esboce o LGR desse sistema, considerando K_p como **parâmetro ajustável**. Note que se consideramos k como parâmetro ajustável, o LGR será exatamente o mesmo.

VI.5. Esboço de LGRs

Exemplo 6:

Seja um **servomecanismo de posição angular**, controlado por um **controlador PD**, modelado pelo seguinte diagrama de blocos:

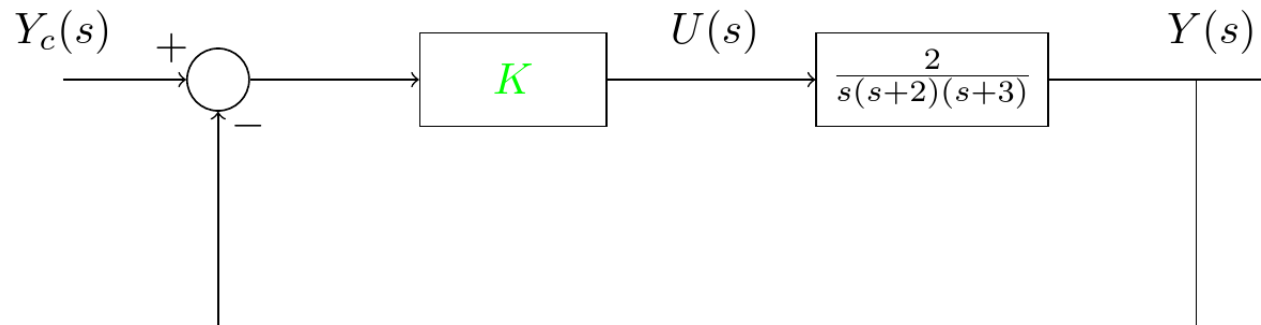


Esboce o LGR desse sistema, considerando K_d como **parâmetro ajustável**.

VI.5. Esboço de LGRs

Exemplo 7:

Seja um sistema de controle modelado pelo seguinte diagrama de blocos:

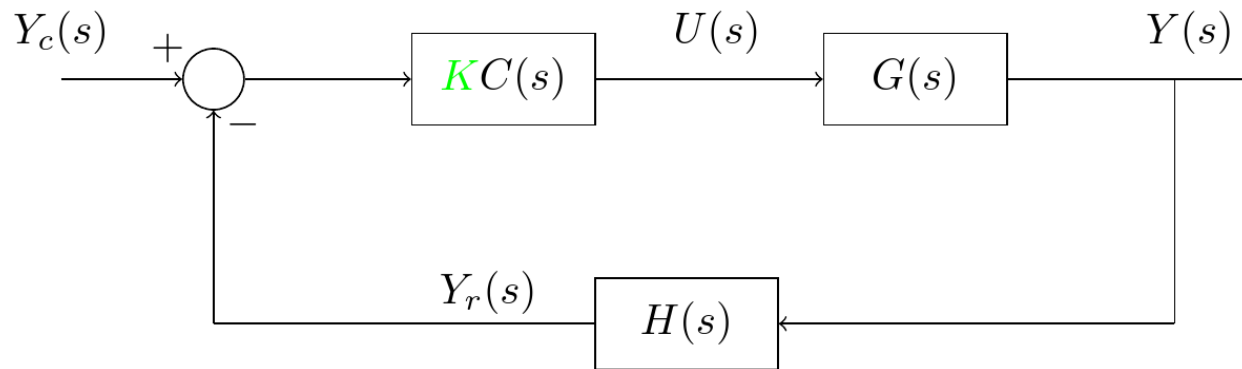


Esboce o LGR desse sistema, considerando K como parâmetro ajustável.

Aplicação: Ajuste de Ganho de Controladores

VI.6. Ajuste de Ganho de Controladores Usando o LGR

Seja um sistema de controle modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



Frequentemente se deseja **ajustar o ganho K** do controlador para que o **sistema em malha fechada** apresente um par de polos complexos **conforme especificado**:

$$s_{1,2}^e = -\zeta^e \omega_n^e \pm j \omega_n^e \sqrt{1 - (\zeta^e)^2}$$

VI.6. Ajuste de Ganho de Controladores Usando o LGR

Desde que $s_{1,2}^e$ estejam sobre o LGR do sistema, tal ajuste pode ser feito mediante a condição de módulo:

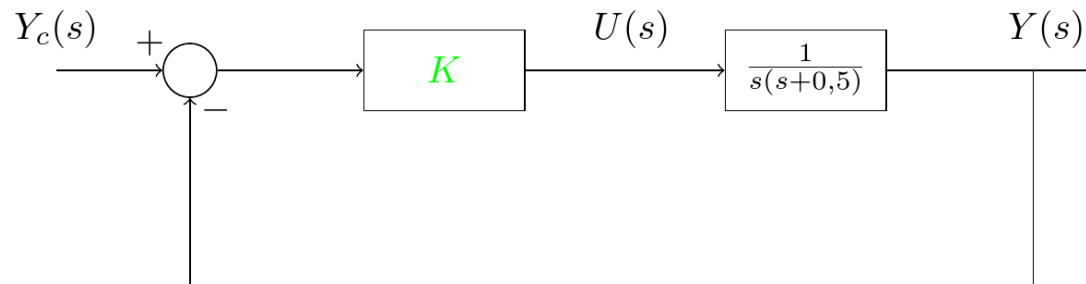
$$|C(s_1^e)G(s_1^e)H(s_1^e)| = \frac{1}{K}$$

Claro, se os polos de malha fechada especificados $s_{1,2}^e$ não pertencerem ao LGR, esse ajuste não será possível.

VI.6. Ajuste de Ganho de Controladores Usando o LGR

Exemplo 8:

Seja um sistema de controle modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



Ajuste o ganho K para que o sistema tenha o seu par de polos de malha fechada posicionado em

$$s_{1,2}^e = -0,25 \pm j0,5$$

Com tal valor de ganho, qual deve ser o tempo de pico t_p e a máxima ultrapassagem M_p da saída $y(t)$ quando a entrada $y_c(t)$ for comandada com um degrau unitário?

Obrigado pela presença
e atenção!