INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-AERONÁUTICA

MPS-43: SISTEMAS DE CONTROLE

VIII. MÉTODOS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Prof. Davi Antônio dos Santos (davists@ita.br)
Departamento de Mecatrônica
http://www.professordavisantos.com – courses/MPS-43

Outubro/2022
São José dos Campos

Sumário

VIII. MÉTODOS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Introdução

VIII.1. Introdução

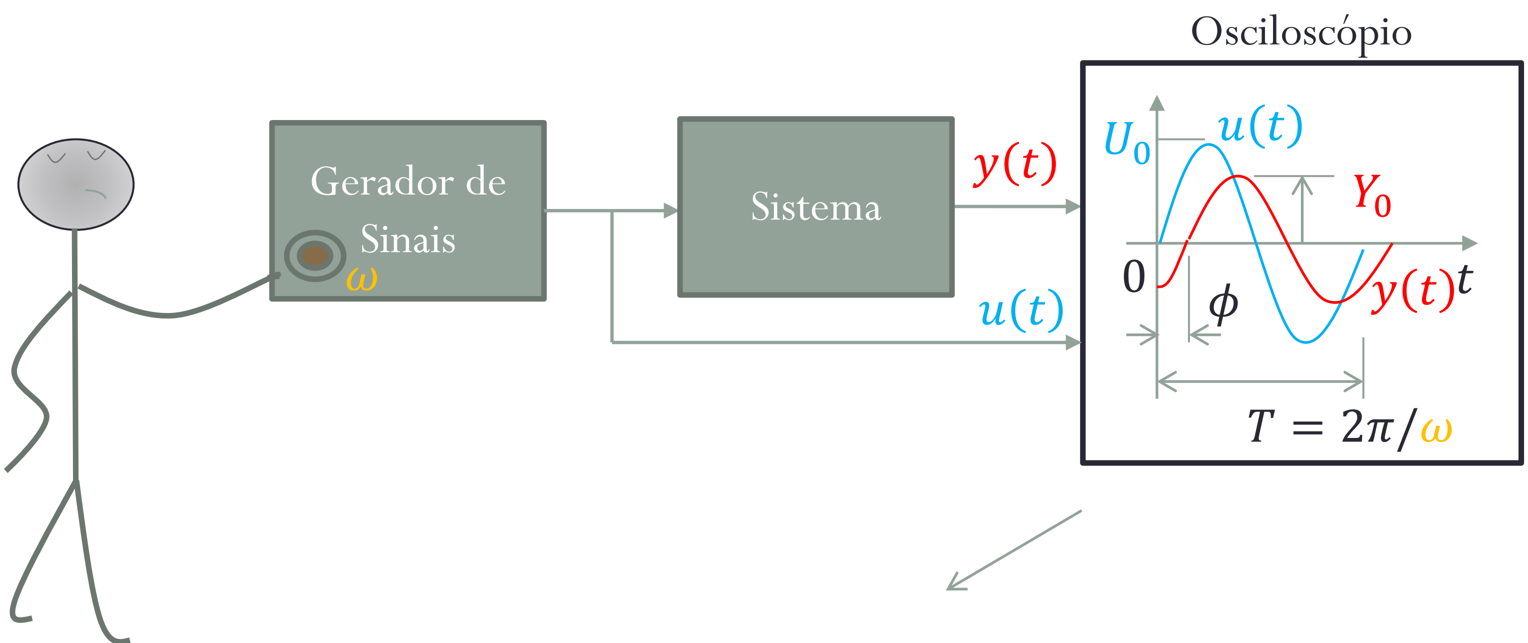
Definição:

A resposta em frequência de um sistema dinâmico:

É a gama de respostas em regime permanente a excitações senoidais de amplitude constante e frequência variável

VIII.1. Introdução

Levantamento Experimental da Resposta em Frequência



Frequência ω	Ganho Y_0/U_0	Defasagem ϕ
...	...	...
...	...	...

Função de Transferência Senoidal

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

VIII.2.1. Definição

Definição:

A função de transferência senoidal (FTS) correspondente à função de transferência (FT) $G(s)$ é por definição $G(j\omega)$.

Exemplo:

- FT: $$G(s) = \frac{k}{s(s+a)}$$
- FTS: $$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(j\omega + a)}$$

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

Sistemas LIT Estáveis:

Considere que a entrada seja

$$u(t) = U_0 \sin \omega t \, , \qquad (1)$$

onde U_0 é a magnitude de $u(t)$ e ω é a frequência em rad/s de $u(t)$.

Suponha que em regime permanente a resposta $y(t)$ à entrada $u(t)$ seja

$$y_P(t) = Y_0 \sin(\omega t + \phi) \, , \qquad (2)$$

onde Y_0 é a magnitude de $y_P(t)$ e ϕ é a diferença de fase entre $y_P(t)$ e $u(t)$.

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

VIII.2.2. Relação Entre a FTS e a Resposta em Frequência

Seja um sistema LIT estável modelado por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m < n$$

Submetendo esse sistema à entrada $u(t)$ senoidal da equação (1), a saída $Y(s)$ fica:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\right)\frac{U_0\omega}{s^2 + \omega^2},$$

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

que, considerando por simplicidade que $G(s)$ tenha polos distintos, pode ser decomposta em frações parciais, dando:

$$Y(s) = \left(\frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+p_n}\right) + \left(\frac{K}{s+j\omega} + \frac{K^*}{s-j\omega}\right).$$

No domínio do tempo, a saída $y(t)$ fica:

$$y(t) = K_1 e^{-p_1 t} + \cdots + K_n e^{-p_n t} + \left(K e^{-j\omega t} + K^* e^{j\omega t}\right), \qquad (3)$$

onde,

$$K = \lim_{s\to -j\omega}\left\{(s+j\omega)\left[G(s)\frac{U_0\,\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\right]\right\} = \frac{G(-j\omega)U_0}{-2j}$$

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

e, portanto,

$$K^* = \frac{G(j\omega)U_0}{2j}.$$

Como $G(s)$ é estável,

$$\lim_{t\to\infty} K_i e^{-p_i t} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tomando o limite de $y(t)$ da equação (3) para $t \to \infty$, obtemos:

$$y_P(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{G(-j\omega)U_0}{-2j} e^{-j\omega t} + \frac{G(j\omega)U_0}{2j} e^{j\omega t} \qquad (4)$$

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

Mas

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\measuredangle G(j\omega)}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\measuredangle G(j\omega)}$$

e, portanto, a equação (4) pode finalmente ser escrita como

$$y_P(t) = U_0|G(j\omega)|\sin\left(\omega t + \measuredangle G(j\omega)\right) \qquad (5)$$

VIII.2. Função de Transferência Senoidal

Comparando (2) e (5), conclui-se, portanto, que

$$\frac{Y_o}{U_o} \equiv |G(j\omega)|, \qquad \phi \equiv \measuredangle G(j\omega)$$

e que a frequência ω do sinal de saída em regime permanente $y_P(t)$ é igual à do sinal de entrada $u(t)$.

Por essa razão,

vamos chamar $G(j\omega)$ de (função) resposta em frequência.

Gráficos de Resposta em Frequência

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Em controle, são usuais as seguintes representações gráficas da resposta em frequência:

1. Diagrama de Bode
2. Diagrama de Nyquist
3. Diagrama de Nichols

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

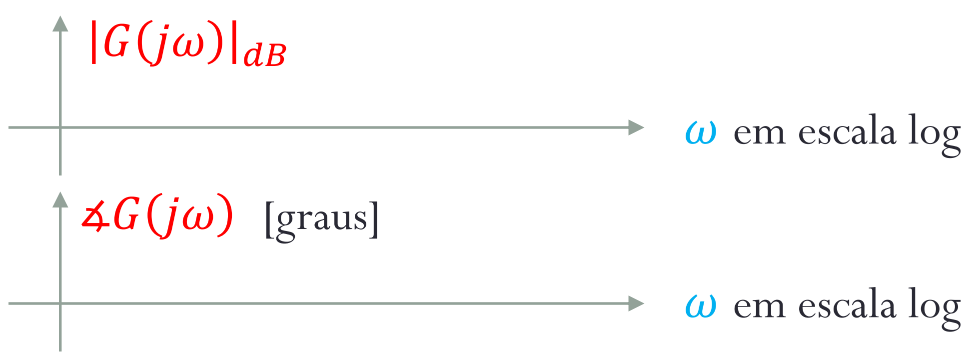
VIII.3.1. Diagrama de Bode

Definição:

Consiste de dois gráficos:

1. Módulo: $|G(j\omega)|_{dB} \times \omega$
2. Fase: $\measuredangle G(j\omega) \times \omega$ [graus]

em que a frequência ω está representada numa escala logarítmica.



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Fatores Básicos:

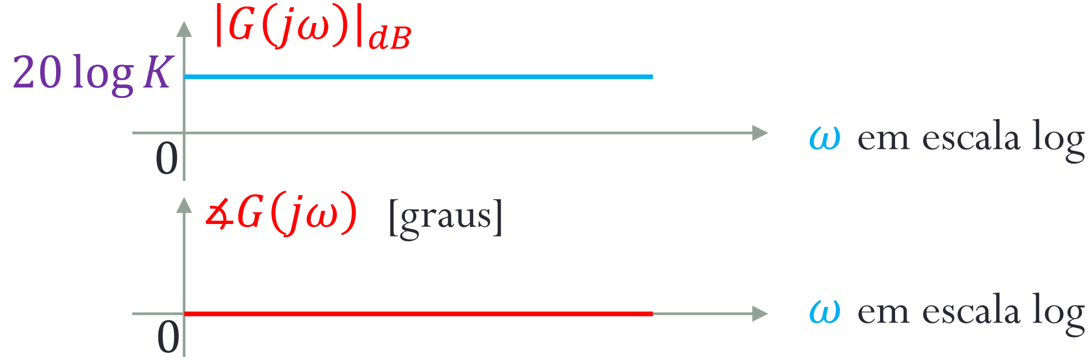
1. Ganho:

$$G(j\omega) = K, \qquad K > 0$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K\,,$$
$$\measuredangle G(j\omega) = 0^o.$$

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

2. Derivador:

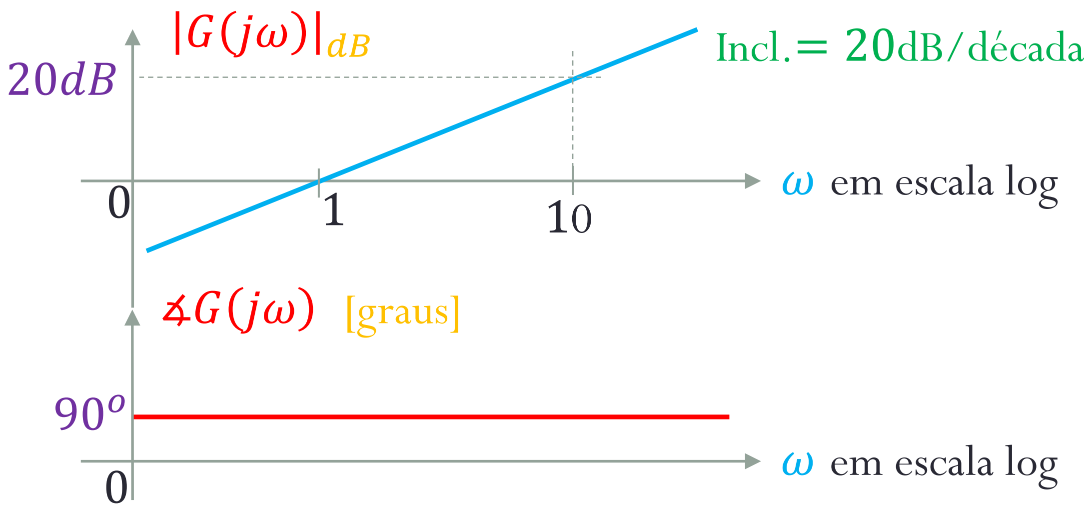
$$G(j\omega) = j\omega$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\omega\,,$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \arctan\frac{\omega}{0} = 90^o.$$

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

3. Integrador:

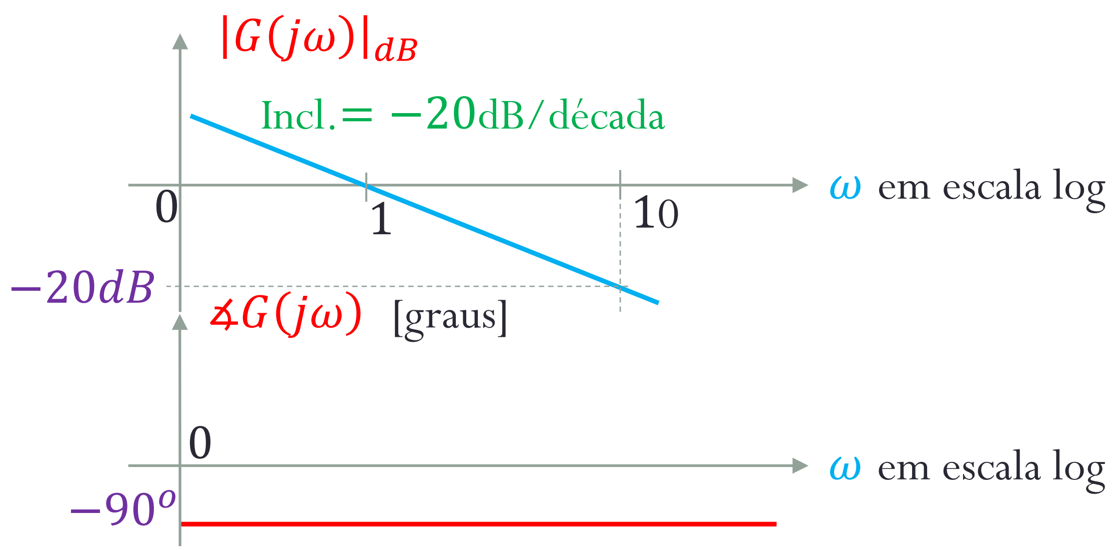
$$G(j\omega) = 1/j\omega$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\omega\,,$$

$$\measuredangle G(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{0} = -90^o.$$

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

4. Fator de primeira ordem no numerador:

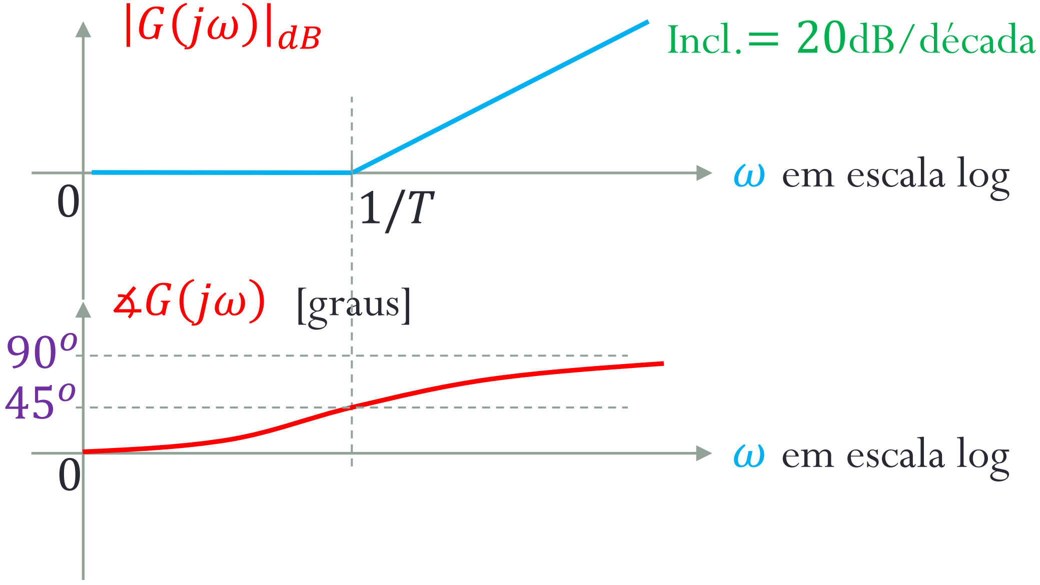
$$G(j\omega) = j\omega T + 1, \qquad T > 0$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,,$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \arctan \omega T\,.$$

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

5. Fator de primeira ordem no denominador:

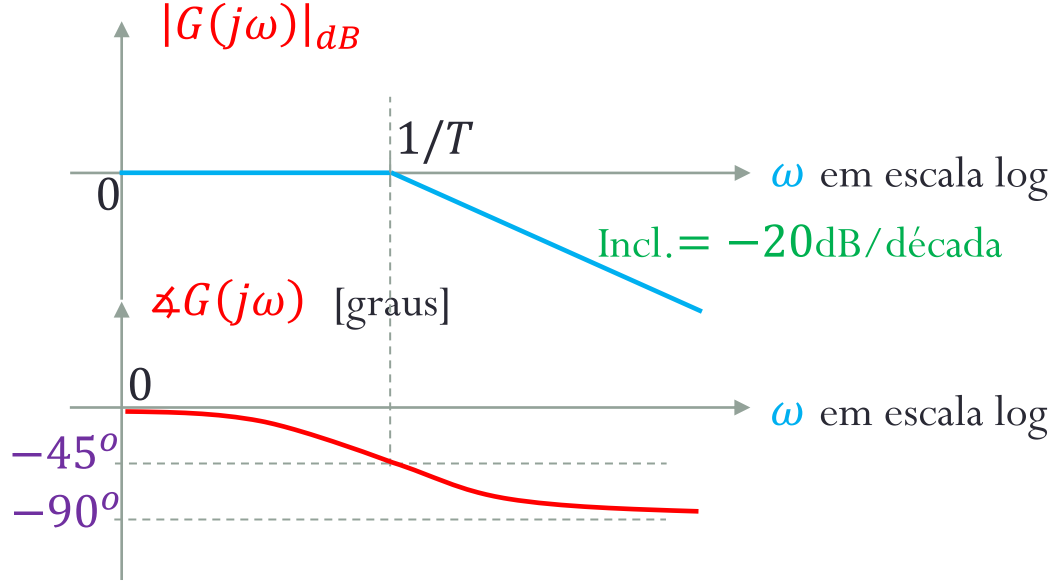
$$G(j\omega) = 1/(j\omega T + 1), \qquad T > 0$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2},$$

$$\measuredangle G(j\omega) = -\arctan \omega T\,.$$

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

6. Fator de segunda ordem no numerador:

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\, j\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\,\omega/\omega_n)^2}\,,$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}.$$

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Valores Extremos da Fase e Assíntotas do Gráfico de Módulo:

- Baixas frequências ($\omega \to 0$):

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\measuredangle G(j\omega) = 0^o$$

- Altas frequências ($\omega \to \infty$):

$$|G(j\omega)|_{dB} = 40 \log \omega/\omega_n \text{ dB}$$

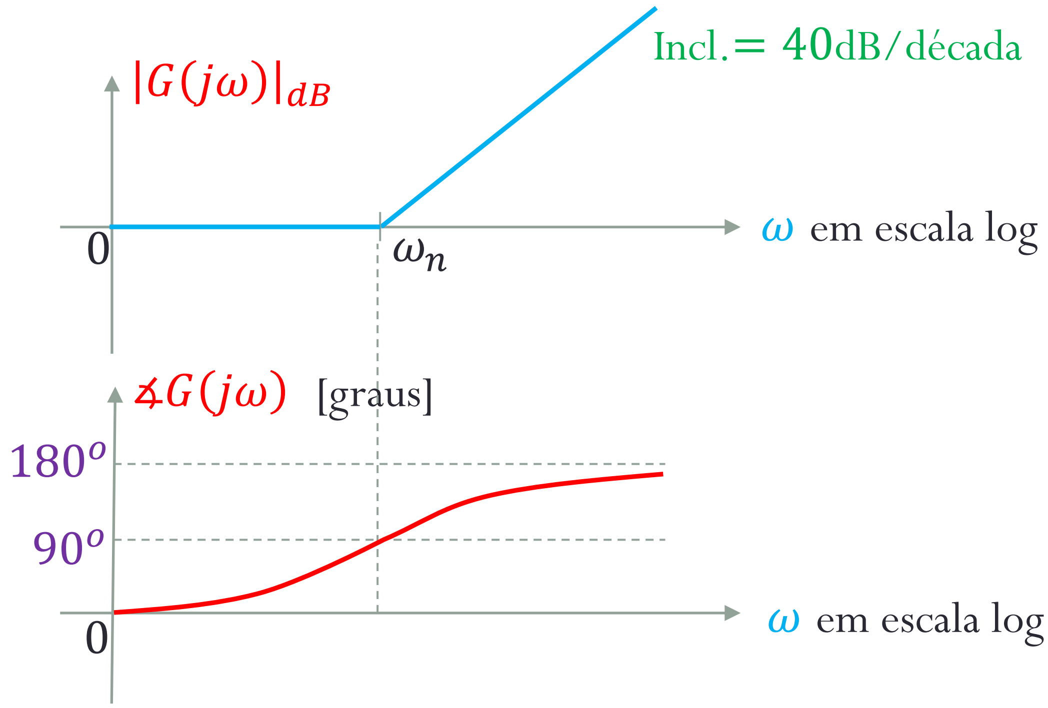
$$\measuredangle G(j\omega) = +180^o$$

As assíntotas do gráfico de módulo em altas e baixas frequências se encontram em $\omega = \omega_n$. Note que nessa frequência,

$$\measuredangle G(j\omega_n) = +90^o$$

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

7. Fator de segunda ordem no denominador:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\, j\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2}$$

Portanto,

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2},$$

$$\measuredangle G(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}.$$

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Valores Extremos da Fase e Assíntotas do Gráfico de Módulo:

- Baixas frequências ($\omega \to 0$):

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\measuredangle G(j\omega) = 0^o$$

- Altas frequências ($\omega \to \infty$):

$$|G(j\omega)|_{dB} = -40 \log \omega/\omega_n \text{ dB}$$

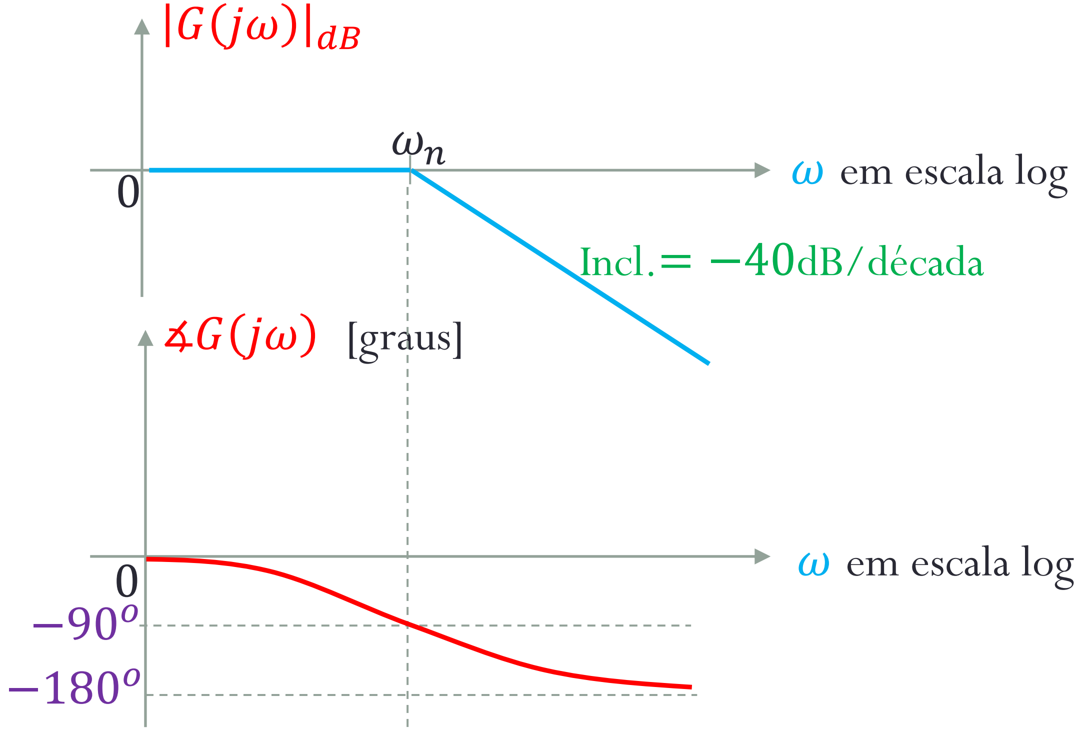
$$\measuredangle G(j\omega) = -180^o$$

As assíntotas do gráfico de módulo em altas e baixas frequências se encontram em $\omega = \omega_n$. Note que nessa frequência,

$$\measuredangle G(j\omega_n) = -90^o$$

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

O esboço fica:



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Procedimento Geral para Esboçar um Diagrama de Bode:

1. Reescreva $G(j\omega)$ de forma a identificar os fatores básicos apresentados acima;
2. Obtenha o diagrama geral adicionando as curvas individuais, tanto de módulo, quanto de fase.

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Exemplo 1:

Seja o sistema modelado pela seguinte FT:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}.$$

Esboce o diagrama de Bode desse sistema.

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Exemplo 2:

Seja o sistema modelado pela seguinte FT:

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{s(s+5)(s^2+2s+10)}$$

Esboce o diagrama de Bode desse sistema.

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Comentários:

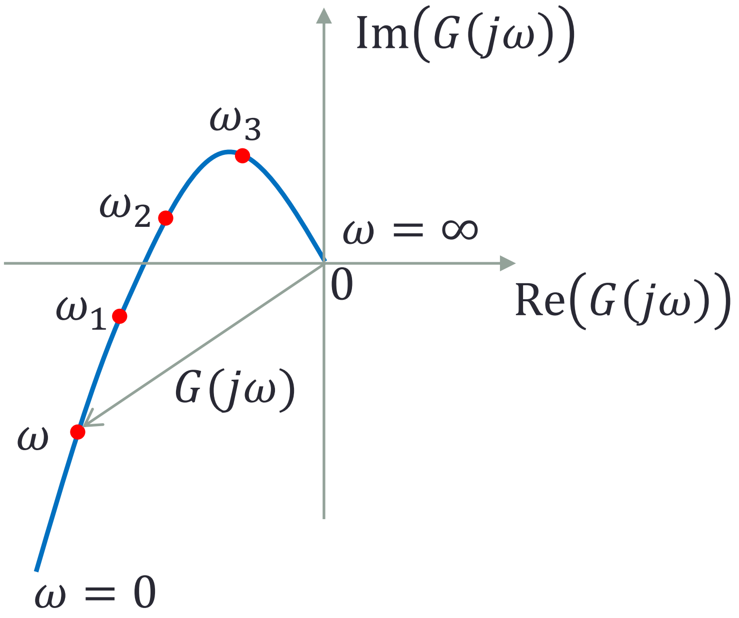
1. O diagrama de Bode é simples de ser esboçado;
2. Por ele, pode-se facilmente prever os efeitos dos polos e zeros de controladores sobre a resposta em frequência de um sistema;
3. Muito útil na análise e projeto de sistemas de controle.

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

VIII.3.2. Diagrama de Nyquist

Definição:

É o gráfico de $G(j\omega)$, no plano complexo, para ω variando de zero a infinito.



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Propriedades Gerais:

Considere um sistema com FTS dada por

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \ldots (1 + 2\bar{\zeta} j\, \omega/\bar{\omega}_n + (j\, \omega/\bar{\omega}_n)^2)}{(j\omega)^\lambda (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \ldots \left(1 + 2\tilde{\zeta} j\, \omega/\tilde{\omega}_n + (j\, \omega/\tilde{\omega}_n)^2\right)} \quad (6)$$

ou

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots}, \qquad m < n. \quad (7)$$

O diagrama de Nyquist desse sistema apresenta as seguintes características:

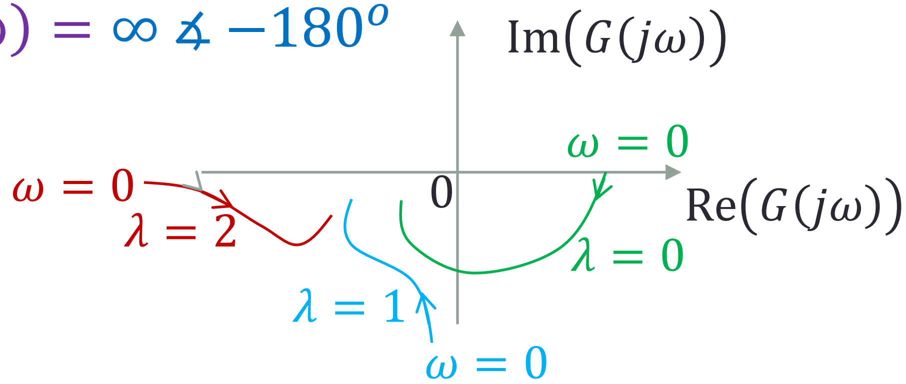
VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

1. Início do Gráfico ($\omega = 0$):

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{K}{(j\omega)^\lambda} = \frac{K}{\omega^\lambda} \measuredangle - 90^o \times \lambda$$

Portanto,

- Se $\lambda = 0$ (tipo 0) $\Rightarrow \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = K \measuredangle 0^o$
- Se $\lambda = 1$ (tipo 1) $\Rightarrow \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \infty \measuredangle -90^o$
- Se $\lambda = 2$ (tipo 2) $\Rightarrow \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \infty \measuredangle -180^o$



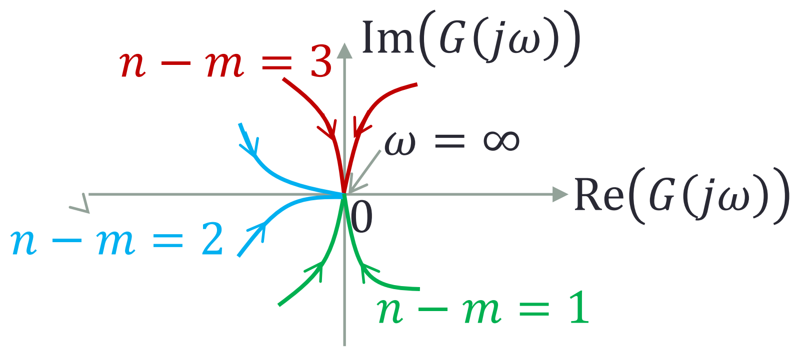
VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

2. Fim do Gráfico ($\omega = \infty$):

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} = 0 \measuredangle -90^o \times (n-m)$$

Portanto,

- Se $n - m = 1 \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = 0 \measuredangle -90^o$
- Se $n - m = 2 \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = 0 \measuredangle -180^o$
- Se $n - m = 3 \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = 0 \measuredangle -270^o$

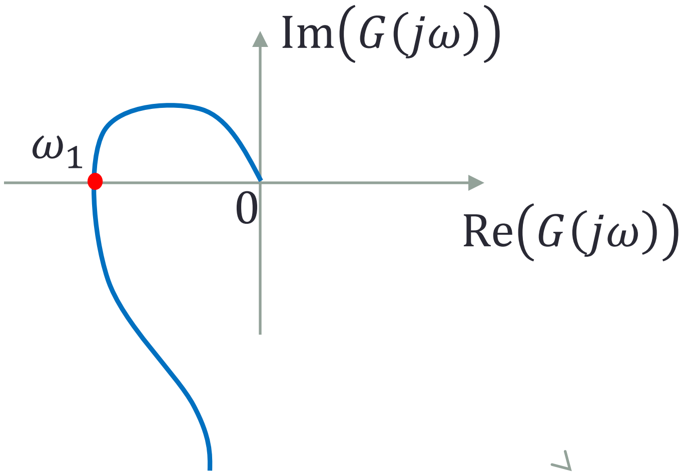


VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

3. Cruzamento com o Eixo Real:

Ocorre nas frequências ω_1 em que

$$\mathrm{Im}\big(G(j\omega_1)\big) = 0$$

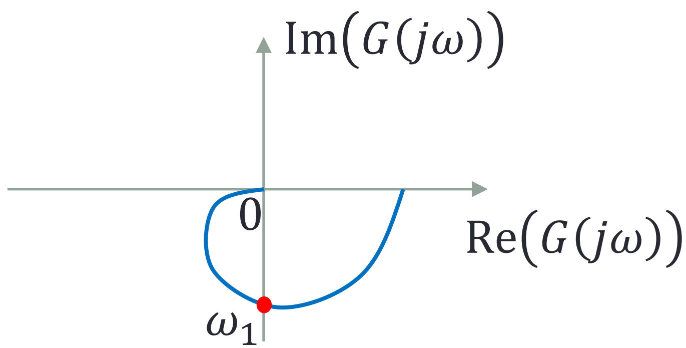


VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

4. Cruzamento com o Eixo Imaginário:

Ocorre nas frequências ω_1 em que

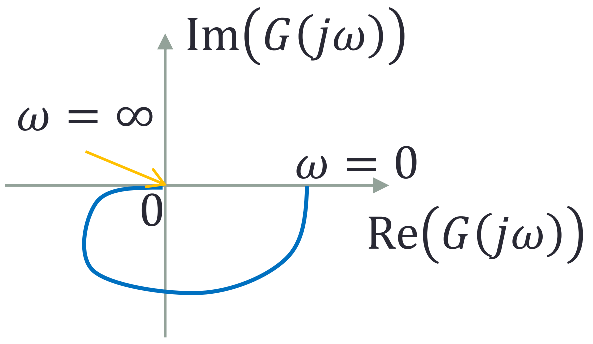
$$\mathrm{Re}\big(G(j\omega_1)\big) = 0$$



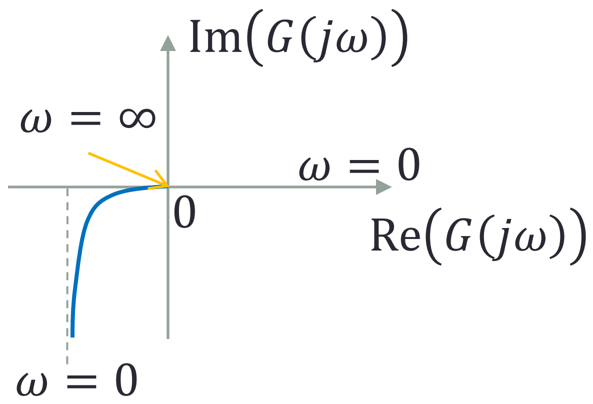
VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Exemplos:

1. $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2} \Rightarrow$ $\lambda = 0$, $n-m=2$



2. $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)(j\omega+2\zeta\omega_n)} \Rightarrow$ $\lambda = 1$, $n-m=2$

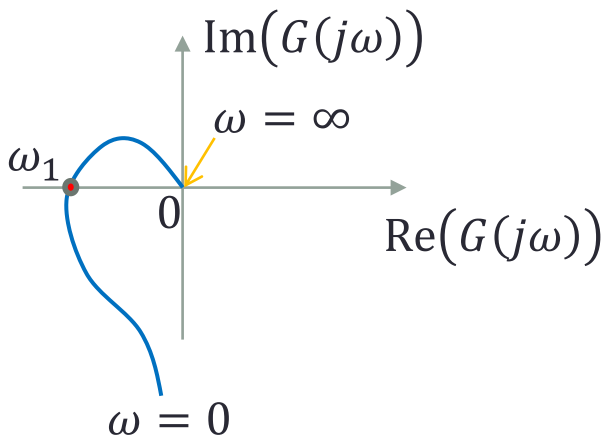


VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

3. $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)\left((j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2\right)} \Rightarrow$

$\lambda = 1$

$n - m = 3$



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Exercício:

No exemplo 3 (acima), calcule a frequência ω_1 de cruzamento do gráfico de Nyquist com o eixo real.

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Comentários:

O diagrama de Nyquist é útil:

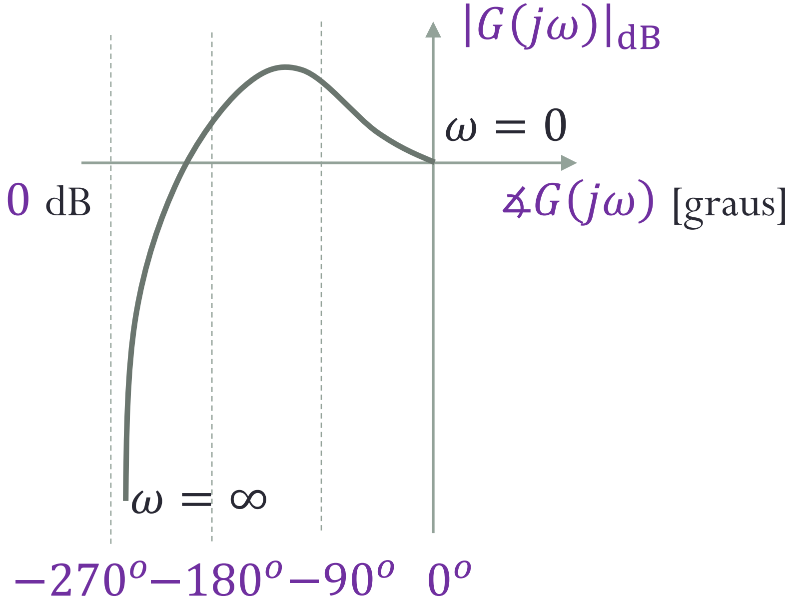
1. na análise de estabilidade absoluta (Capítulo IV);
2. na análise de estabilidade relativa (Seção VIII.4).

VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

VIII.3.3. Diagrama de Nichols

Definição:

É o gráfico de $|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \times \measuredangle G(j\omega)$ para ω variando de zero a infinito.



VIII.3. Gráficos de Resposta em Frequência

Comentários:

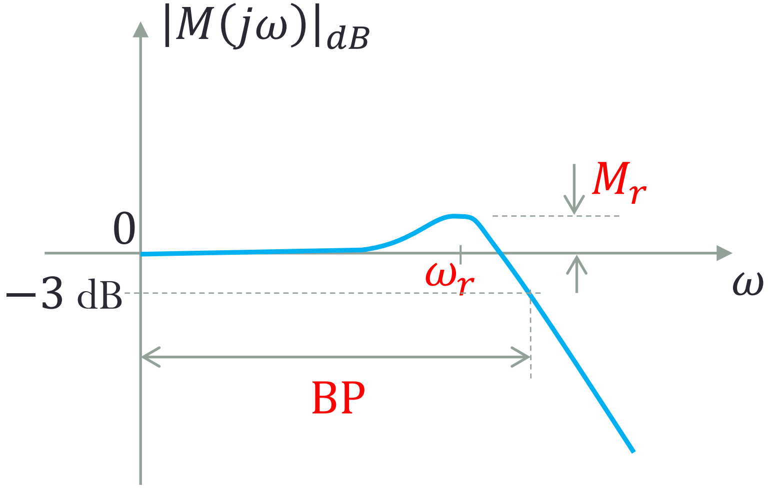
1. O diagrama de Nichols compacta o diagrama de Bode num único gráfico;
2. Não há um conjunto de regras para o seu esboço;
3. No passado era empregado no ajuste de ganho da malha para satisfazer um pico de ressonância desejado.

Resposta em Frequência: Malha Fechada

VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

VIII.4.1. Definições Preliminares

Curva de módulo típica de sistemas de controle em malha fechada:



ω_r: Frenquência de ressonância

M_r: Pico de ressonância

BP: Banda passante

VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

VIII.4.2. Sistema de Segunda Ordem Padrão

Neste caso, a função de transferência senoidal (FTS) de malha fechada é:

$$M(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}, \qquad (8)$$

Cujo módulo é

$$|M(j\omega)| = \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

Ou, definindo $u \triangleq \omega/\omega_n$,

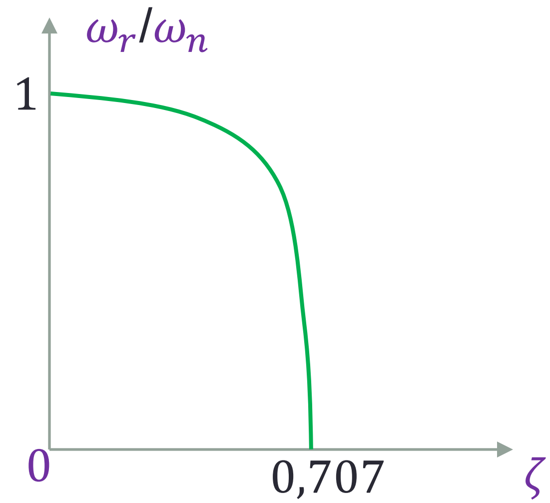
$$|M(j\omega)| = [(1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{-\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Frequência de Ressonância:

A ressonância de um sistema de segunda ordem padrão ocorre na frequência:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

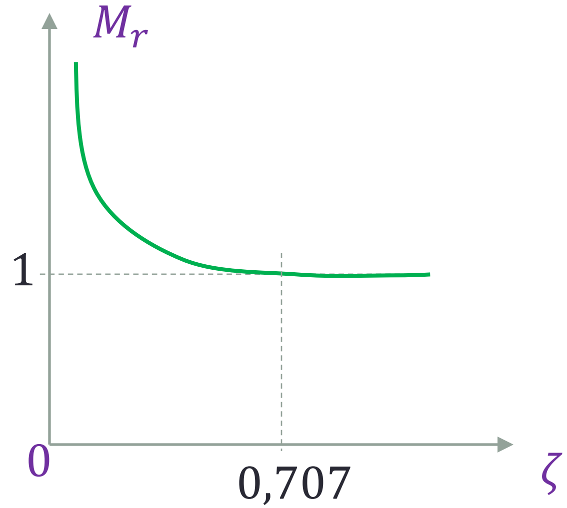


VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Pico de Ressonância:

O pico de ressonância de um sistema de segunda ordem padrão é dado por:

$$M_r = |M(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Banda Passante:

A banda passante de um sistema de segunda ordem padrão é dada por:

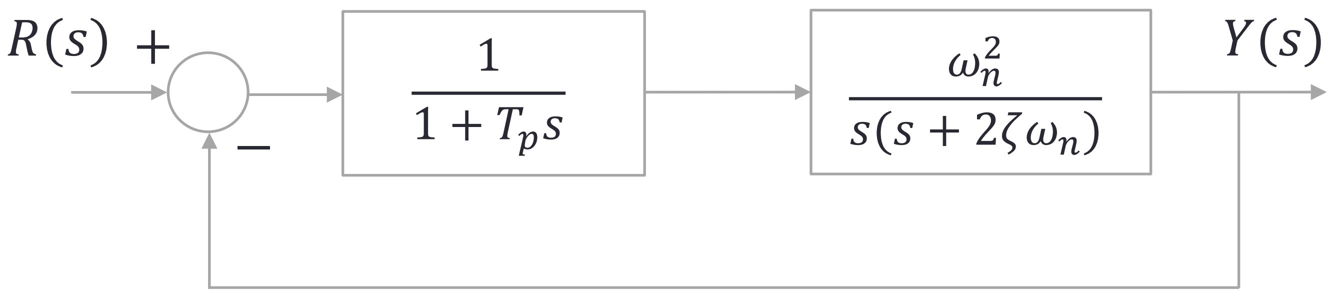
$$\mathrm{BP} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

VIII.4.3. Efeitos da Inserção de Raízes

Inserção de um Polo:

Seja o sistema modelado por

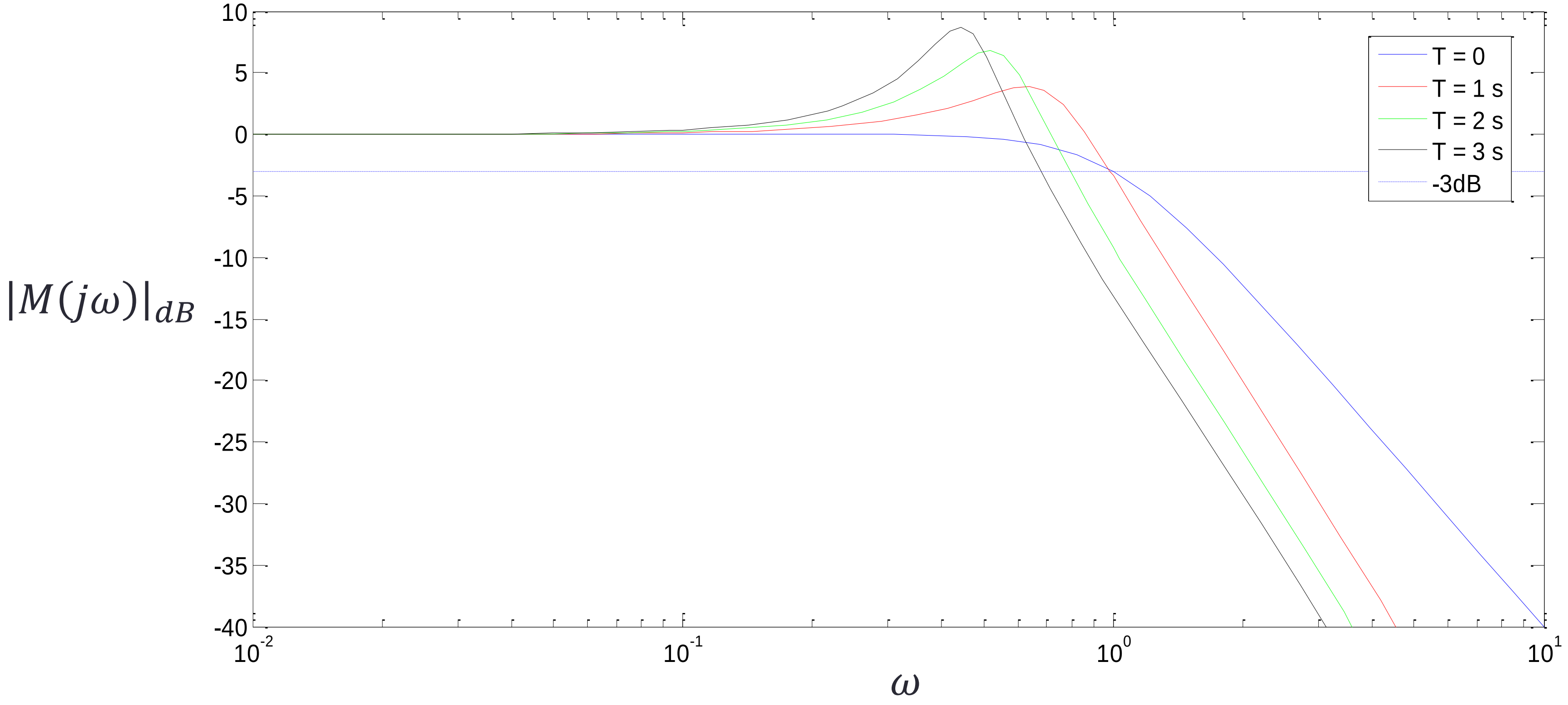


A função de transferência de malha fechada fica

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{T_p s^3 + \left(2\zeta\omega_n T_p + 1\right)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Considerando, por exemplo, $\zeta = 0{,}707$ e $\omega_n = 1$ rad/s e variando $T_p = 0; 1; 2; 3$, obtemos as seguintes curvas de módulo:



VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Comentários:

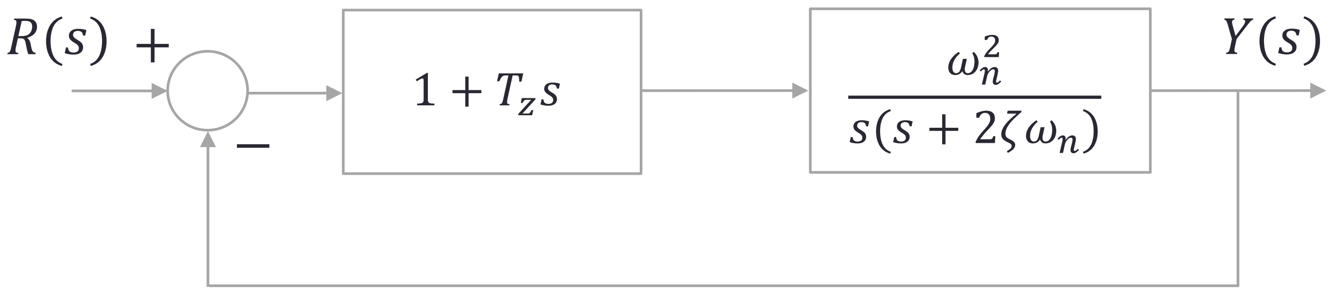
Espera-se, portanto, que o polo de malha aberta inserido em $\check{s} = -1/T_p$, à medida que se aumenta T_p:

- Reduza BP, tornando o sistema mais lento;
- Aumente M_r, tornando o sistema menos estável.

VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Inserção de um Zero:

Seja o sistema modelado por

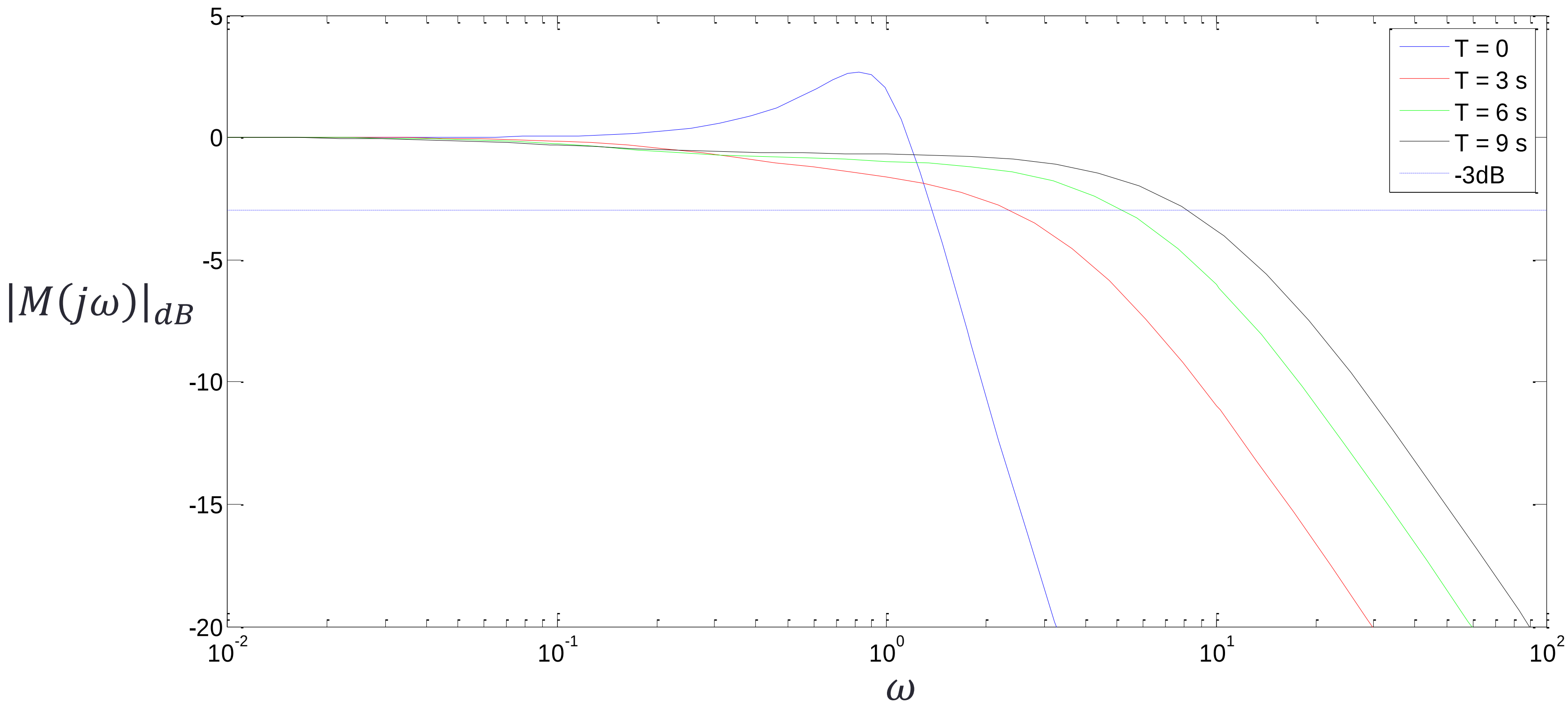


A função de transferência de malha fechada fica

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(1+T_z s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T_z\omega_n^2)s + \omega_n^2}.$$

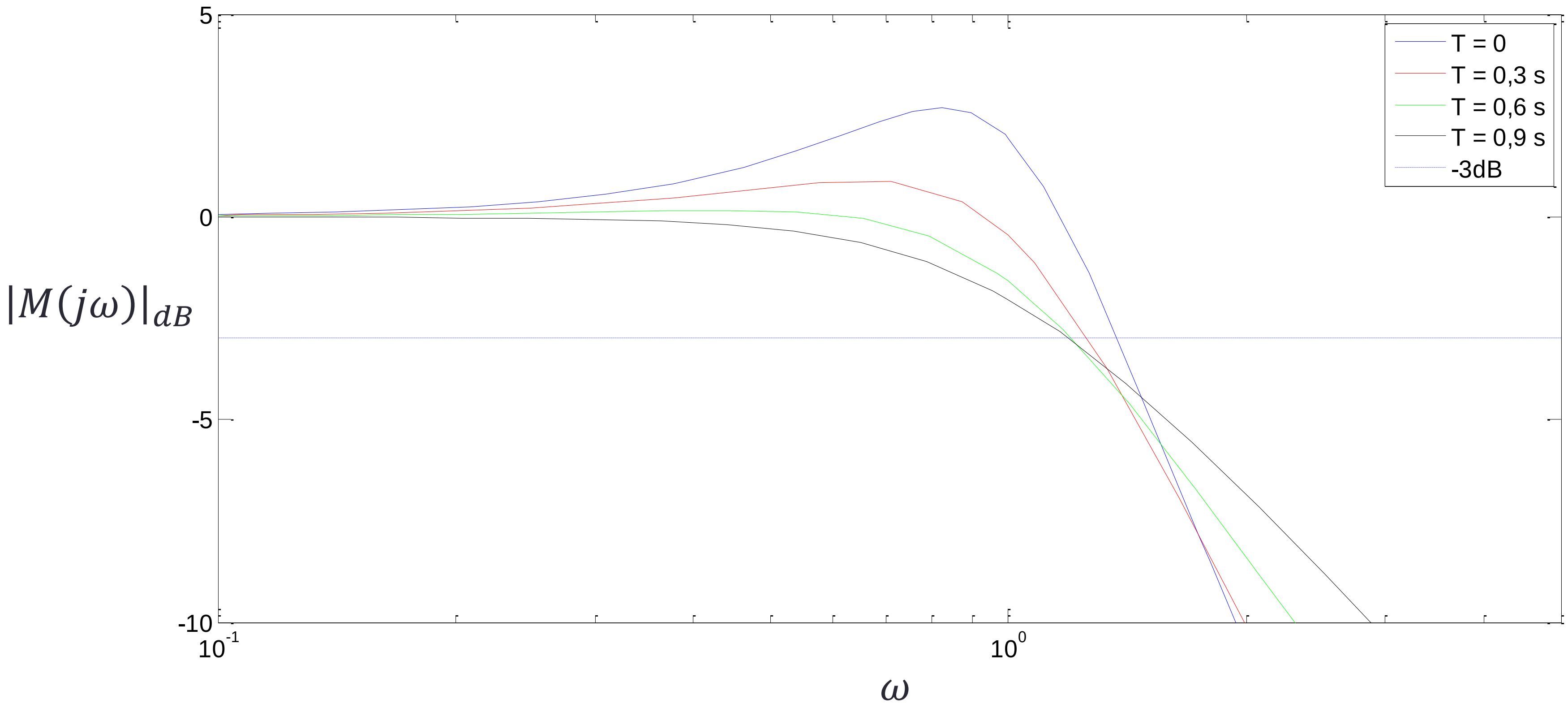
VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Considerando, por exemplo, $\zeta = 0{,}4$ e $\omega_n = 1$ rad/s e variando $T_z = 0; 3; 6; 9$, obtemos as seguintes curvas de módulo:



VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Considerando, por outro lado, $\zeta = 0{,}4$ e $\omega_n = 1$ rad/s e variando $T_z = 0; 0{,}3; 0{,}6; 0{,}9$, obtemos as seguintes curvas de módulo:



VIII.4. Resposta em Frequência de Malha Fechada

Comentários:

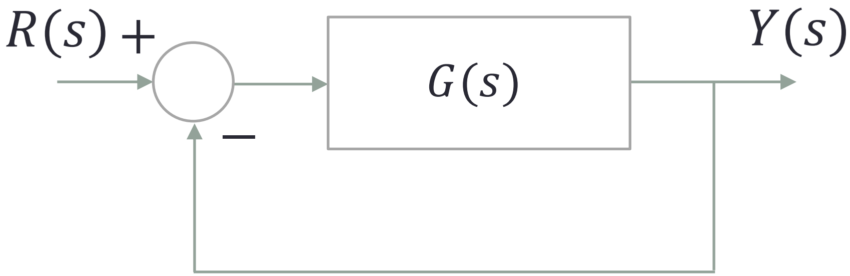
Espera-se, portanto, que o zero de malha aberta inserido em $\check{s} = -1/T_z$, à medida que se aumenta T_z:

- Para "grandes" valores de T_z:
  - Aumente BP, tornando o sistema mais rápido;
  - Reduza M_r, tornando o sistema mais estável.
- Para "pequenos" valores de T_z:
  - Reduza BP, tornando o sistema mais lento;
  - Reduza M_r, tornando o sistema mais estável.

Erro em Regime Permanente

VIII.5. Erro em Regime Permanente

Seja o sistema modelado por



Considere que

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \ldots (T_m s + 1)}{s^{\lambda}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \ldots (T_n s + 1)} \quad (11)$$

ou

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \ldots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^{\lambda}(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \ldots (T_n j\omega + 1)} \quad (12)$$

VIII.5. Erro em Regime Permanente

Sistemas Tipo 0:

O sistema (11) é do tipo 0 se $\lambda = 0$. Neste caso, a constante de erro de posição κ_p é

$$\kappa_p \triangleq \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\ldots(T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\ldots(T_n s + 1)} = K$$

Por outro lado, fazendo $\omega \to 0$ em (12), o módulo $|G(j\omega)|$ pode ser aproximado por

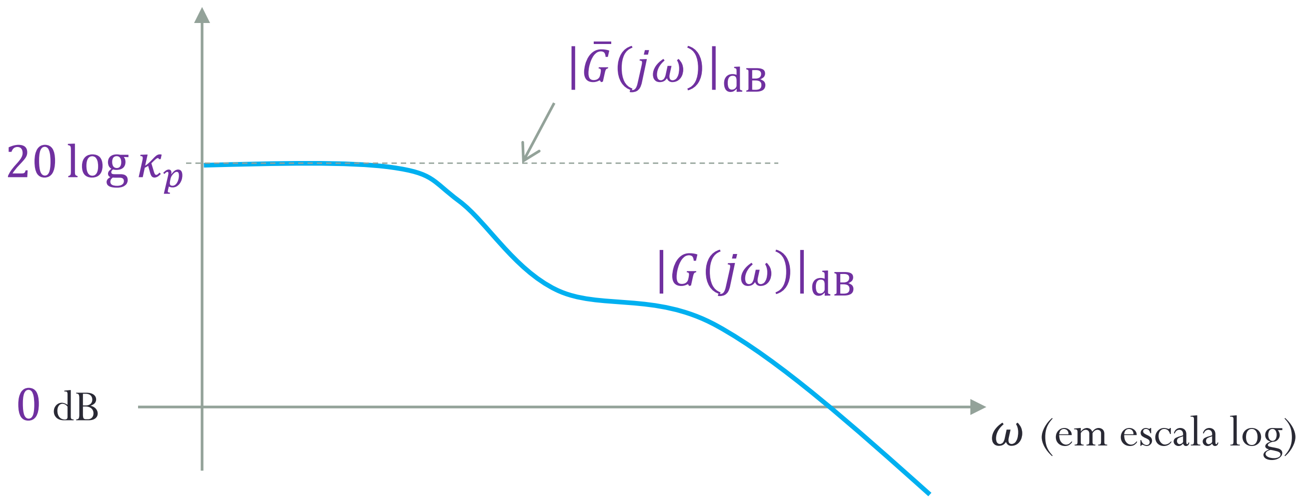
$$|\bar{G}(j\omega)| = K,$$

donde conclui-se que

$$\boxed{\kappa_p = |\bar{G}(j\omega)|}$$

VIII.5. Erro em Regime Permanente

Graficamente:



VIII.5. Erro em Regime Permanente

Sistemas Tipo 1:

O sistema (11) é do tipo 1 se $\lambda = 1$. Neste caso, a constante de erro de velocidade κ_v é

$$\kappa_v \triangleq \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \ldots (T_m s + 1)}{\cancel{s}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \ldots (T_n s + 1)} = K$$

Por outro lado, fazendo $\omega \to 0$ em (12), o módulo $|G(j\omega)|$ pode ser aproximado por

$$|\bar{G}(j\omega)| = \left|\frac{K}{j\omega}\right| = \frac{\kappa_v}{\omega}. \qquad (13)$$

VIII.5. Erro em Regime Permanente

Logo,

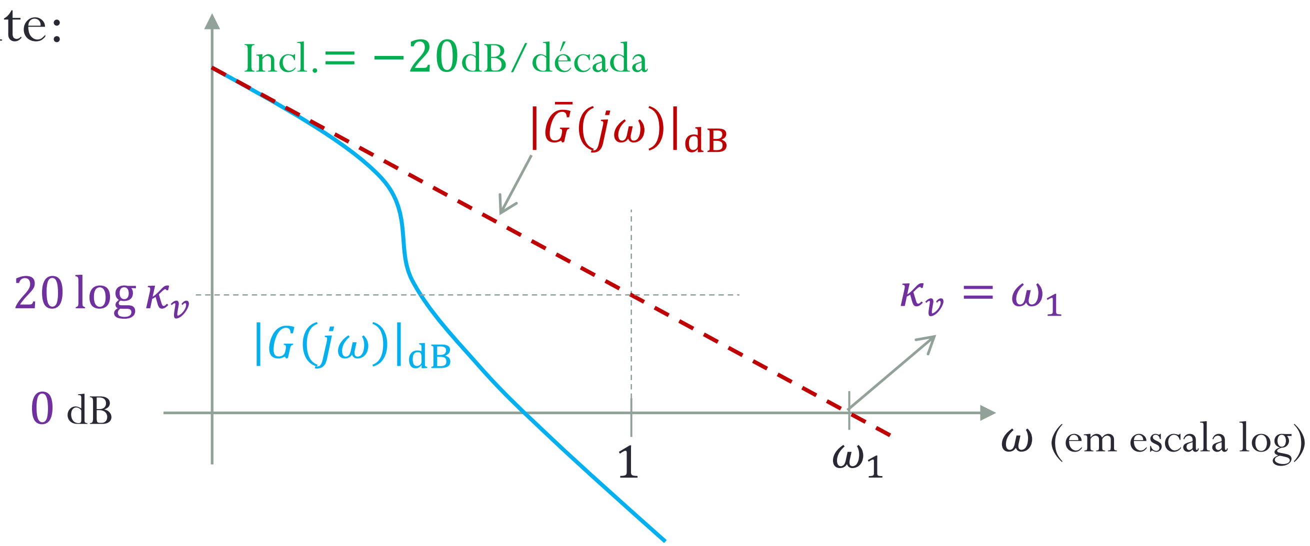
- Fazendo $\omega = 1$ na equação (13), obtemos:

$$\kappa_v = |\bar{G}(j1)|$$

- Fazendo $|\bar{G}(j\omega_1)| = 1$ na equação (13), obtemos:

$$\kappa_v = \omega_1$$

Graficamente:



VIII.5. Erro em Regime Permanente

Sistemas Tipo 2:

O sistema (11) é do tipo 2 se $\lambda = 2$. Neste caso, a constante de erro de aceleração κ_a é

$$\kappa_a \triangleq \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\ldots(T_m s + 1)}{\cancel{s^2}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\ldots(T_n s + 1)} = K$$

Por outro lado, fazendo $\omega \to 0$ em (12), o módulo $|G(j\omega)|$ pode ser aproximado por

$$|\bar{G}(j\omega)| = \left|\frac{K}{(j\omega)^2}\right| = \frac{\kappa_a}{\omega^2} \qquad (14)$$

VIII.5. Erro em Regime Permanente

Logo,

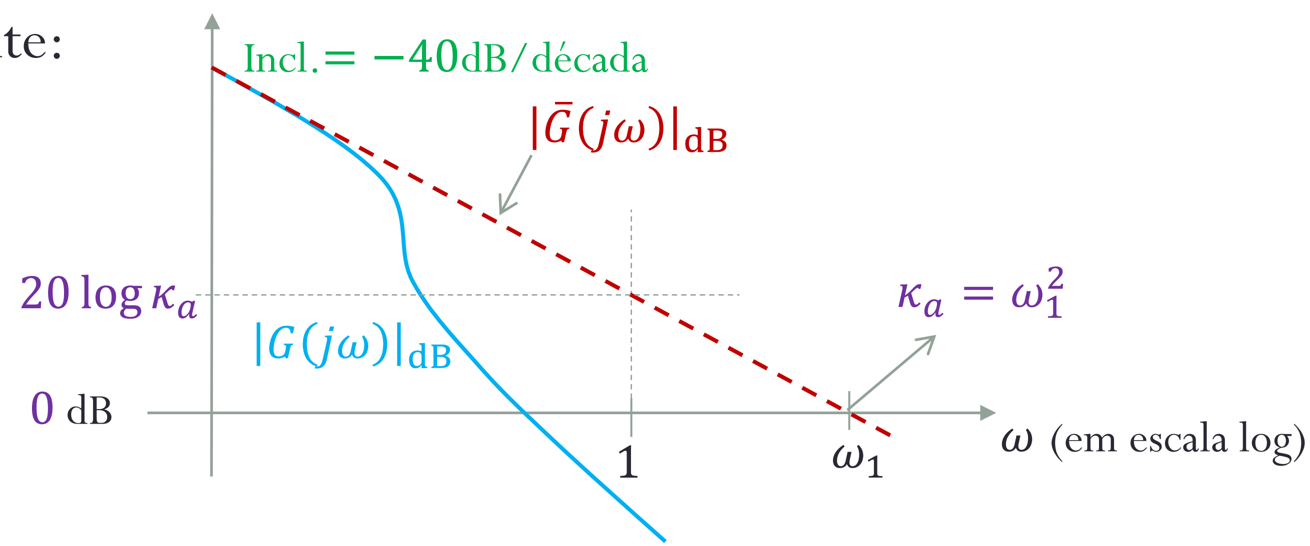
- Fazendo $\omega = 1$ na equação (14), obtemos:

$$\kappa_a = |\bar{G}(j1)|$$

- Fazendo $|\bar{G}(j\omega_1)| = 1$ na equação (14), obtemos:

$$\kappa_a = \omega_1^2$$

Graficamente:



Estabilidade Relativa

VIII.6. Estabilidade Relativa

VIII.6.1. Definições

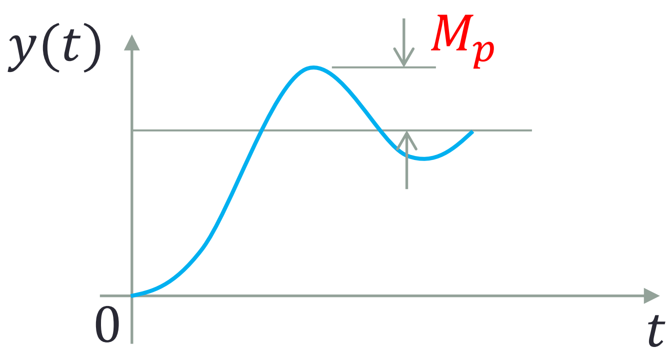
Estabilidade Relativa:

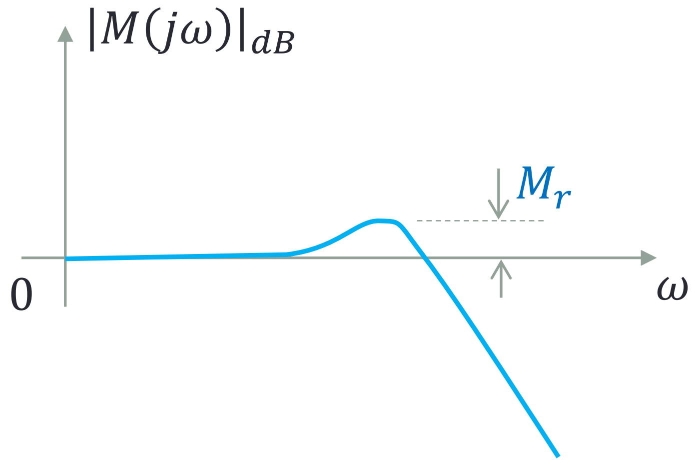
Estabilidade relativa de um sistema de controle consiste no seu grau de estabilidade.

VIII.6. Estabilidade Relativa

Como Quantificar a Estabilidade Relativa?

Por exemplo, quanto maior o M_p ou o M_r, menos estável é o sistema!

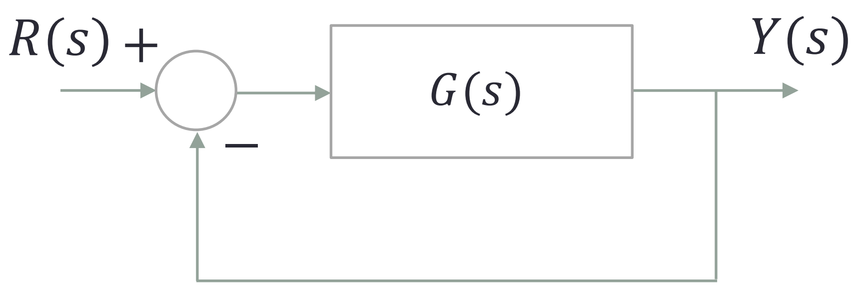




VIII.6. Estabilidade Relativa

Exemplo Computacional:

Seja o sistema de controle em malha fechada modelado por:



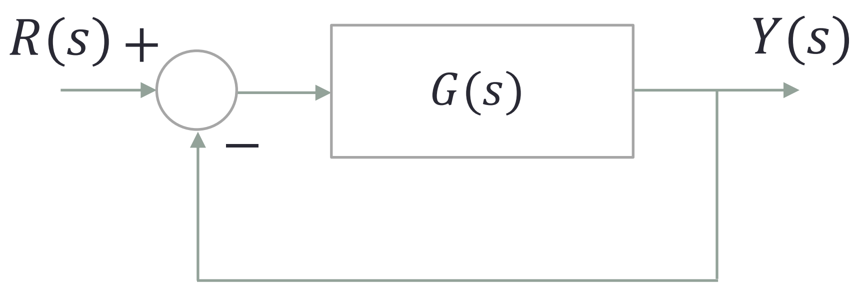
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Usando o comando `rltool` do MATLAB, mova os polos de malha fechada, aproximando-os e afastando-os do semiplano complexo da direita e observe nos gráficos de resposta o que acontece com M_p e M_r.

VIII.6. Estabilidade Relativa

Margens de Estabilidade:

Seja um sistema modelado por:



e considere que $G(s)$ não tenha nem polos nem zeros no semiplano complexo da direita.

VIII.6. Estabilidade Relativa

Uma forma bastante usual de medir a estabilidade relativa do sistema em questão é mediante a "distância" do diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ ao ponto -1.

Para medir essa "distância", utilizamos as chamadas margem de fase e margem de ganho, que são definidas em seguida.

VIII.6. Estabilidade Relativa

Frequência de Cruzamento de Ganho (ω_{cg}):

É definida como a frequência $\omega = \omega_{cg}$ tal que

$$|G(j\omega_{cg})| = 1$$

Frequência de Cruzamento de Fase (ω_{cf}):

É definida como a frequência $\omega = \omega_{cf}$ tal que

$$\measuredangle G(j\omega_{cf}) = \pm 180^o$$

VIII.6. Estabilidade Relativa

Margem de Fase *(μ_f)*:

$$\mu_f \triangleq 180^o + \measuredangle G(j\omega_{cg}) \qquad \text{[graus]}$$

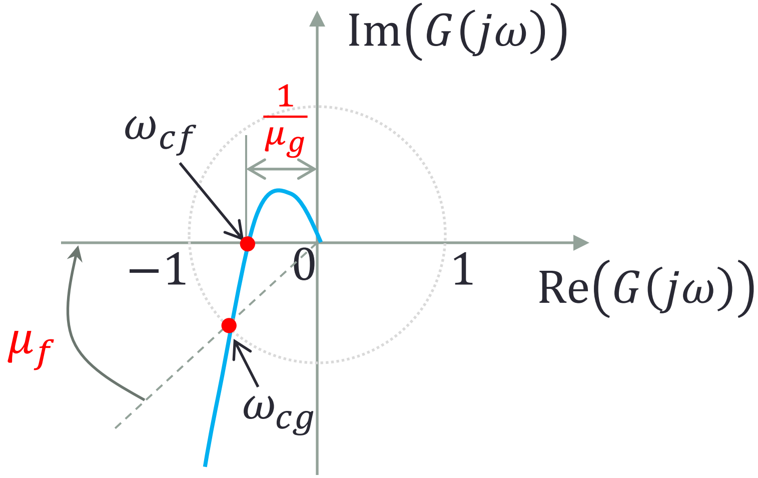
Margem de Ganho *(μ_g)*:

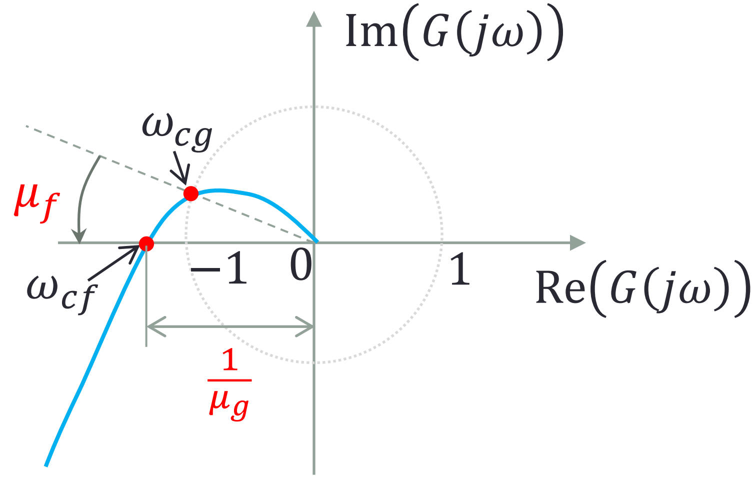
$$\mu_{g(dB)} \triangleq 20 \log \frac{1}{|G(j\omega_{cf})|} \qquad \text{[dB]}$$

VIII.6. Estabilidade Relativa

VIII.6.2. Medição Gráfica das Margens de Estabilidade

Diagrama de Nyquist:



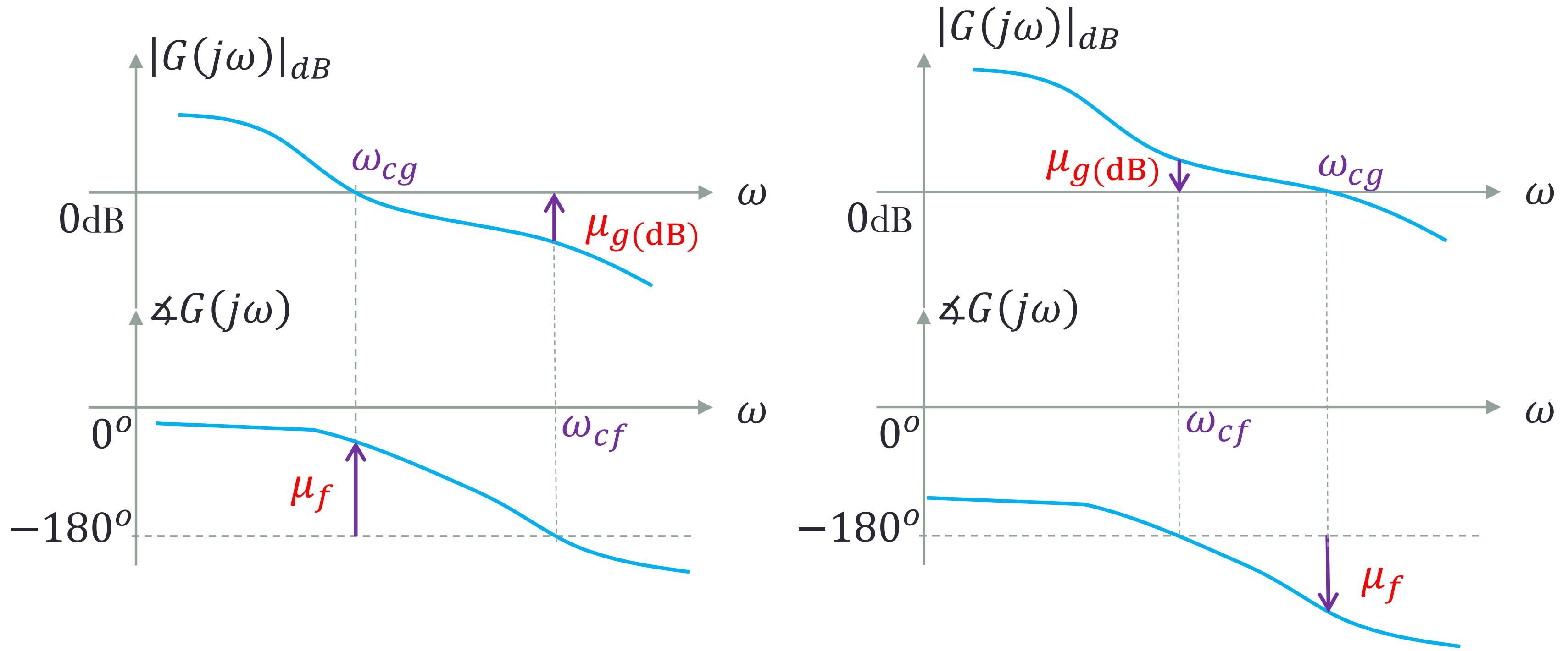


μ_f + $\mu_{g(\mathrm{dB})}$ + (estável)

μ_f − $\mu_{g(\mathrm{dB})}$ − (instável)

VIII.6. Estabilidade Relativa

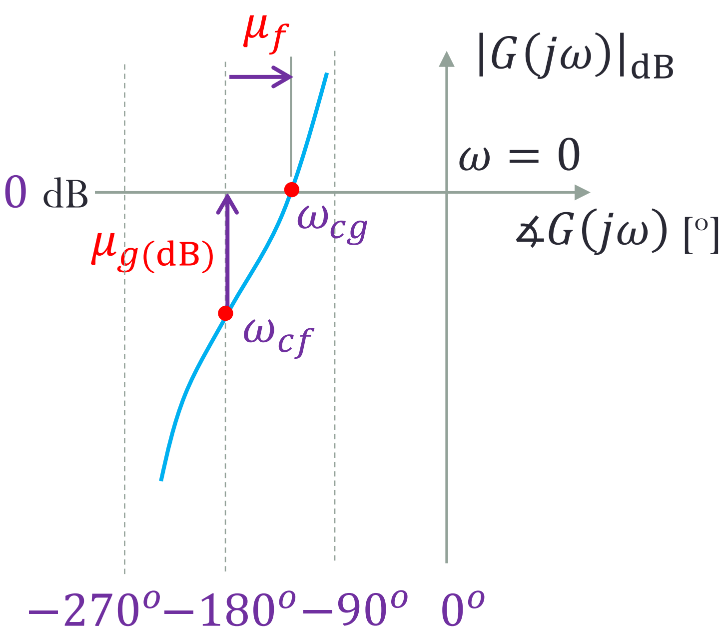
Diagrama de Bode:



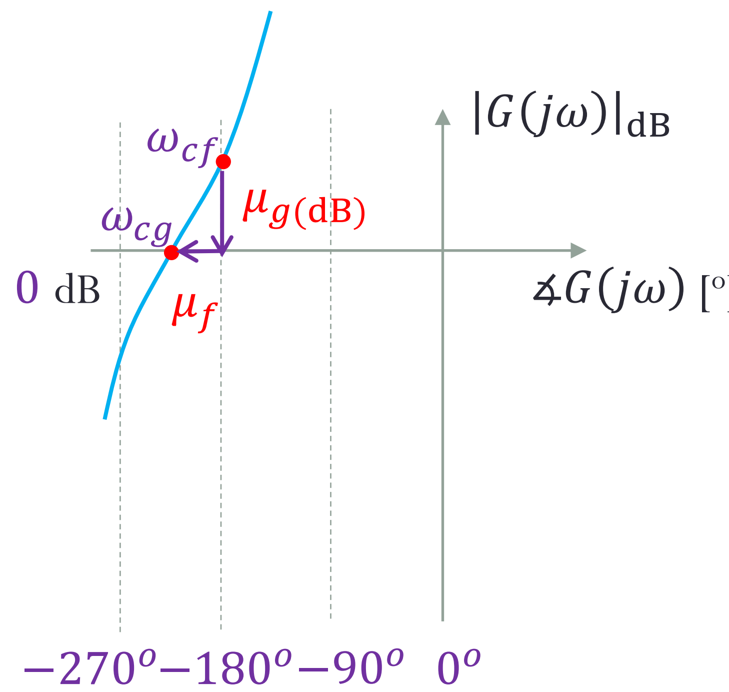
μ_f + $\mu_{g(\mathrm{dB})}$ + (estável) μ_f − $\mu_{g(\mathrm{dB})}$ − (instável)

VIII.6. Estabilidade Relativa

Diagrama de Nichols:



μ_f + $\mu_{g(\mathrm{dB})}$ + (estável)



μ_f − $\mu_{g(\mathrm{dB})}$ − (instável)

Obrigado pela presença

e atenção!